VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Institut dopravy

Modelování systému carsharing

Carsharing System Modelling

Student: Bc. Ondřej Varecha

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.

Ostrava 2020

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Institut dopravy

Zadání diplomové práce

Student:	**Bc. Ondřej Varecha**
Studijní program:	N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor:	2301T003 Dopravní technika a technologie
Specializace:	20 Silniční doprava
Téma:	Modelování systému car sharing Car Sharing System Modelling
Jazyk vypracování:	čeština

Zásady pro vypracování:

Cíl práce: Na základě dostupných zdrojů otestovat existující modely pro plánování jízd vozidel v systému car sharing a případně navrhnout modifikace vedoucí k rozšíření jejich spektra.

Osnova práce:
1. Úvod - motivace k řešení.
2. Technologie car sharing, shrnutí základních výhod a nevýhod.
3. Matematický model pro plánování jízd vozidel zařazených do systému.
4. Návrh modifikace existujícího modelu.
5. Výpočetní experimenty s modely.
6. Zhodnocení dosažených výsledků.
7. Závěr.

Seznam doporučené odborné literatury:

Carlier, A.; Munier-Kordon, A.; Klaudel, W. Mathematical model for the study of relocation strategies in one-way carsharing systems. Transportation Research Procedia, roč. 10, str. 374 - 383.
Correia, G., H., d. A.; Antunes, A., P.: Optimization approach to depot location and trip selection in one-way carsharing systems. Transportation Research Part E, roč. 48, č. 1, str. 233–247. ISSN 1366-5545.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Dušan Teichmann, Ph.D.**

Datum zadání: 20.12.2019
Datum odevzdání: 18.05.2020

Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, -4-

prof. Ing. Aleš Slíva, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne 18. května 2020

Valler

....

Bc. Ondřej Varecha

Prohlašuji, že:

- jsem si vědom, že na tuto moji závěrečnou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. Zákon o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (dále jen Autorský zákon), zejména § 35 (Užití díla v rámci občanských či náboženských obřadů nebo v rámci úředních akcí pořádaných orgány veřejné správy, v rámci školních představení a užití díla školního) a § 60 (Školní dílo),
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo užít tuto závěrečnou diplomovou práci nekomerčně ke své vnitřní potřebě (§ 35 odst. 3 Autorského zákona),
- bude-li požadováno, jeden výtisk této diplomové práce bude uložen u vedoucího práce,
- s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 Autorského zákona,
- užít toto své dílo, nebo poskytnout licenci k jejímu využití, mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše),
- beru na vědomí, že podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů – že tato bakalářská*) práce bude před obhajobou zveřejněna na pracovišti vedoucího práce a v elektronické podobě uložena a po obhajobě zveřejněna v Ustřední knihovně VŠB-TUO, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě dne 18. května 2020

Valu

....

Bc. Ondřej Varecha

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

VARECHA, O. *Modelování systému carsharing: diplomová práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 2020, 100 s. Vedoucí práce: Teichmann, D.

Diplomová práce se zabývá problematikou relokace carsharingových vozidel v rámci volného carsharingu s využitím vhodných matematických modelů. V první části práce je problematika carsharingu popsána obecně a jsou uvedeny výhody a nevýhody carsharingu. Poté následuje obecný popis čtyř optimalizačních úloh, které je možno použít pro matematické modelování systému volného carsharingu. Další kapitoly jsou věnovány variantám procesu relokace carsharingových vozidel a pro každou variantu je vytvořen samostatný matematický model. Závěr práce je věnován výpočetním experimentům s navrženými modely a zhodnocení dosažených výsledků.

ANNOTATION OF MASTER THESIS

VARECHA, O. *Carsharing System Modelling: Master Thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Transport, 2020, 100 p. Thesis head: Teichmann, D.

This Master thesis deals with the issue of carsharing vehicle relocation within free carsharing services using appropriate mathematical models. In the first part of the thesis, the issue of carsharing is described in general and the advantages and disadvantages of carsharing are presented. This is followed by a general description of four optimization tasks that can be used for mathematical modeling of a free carsharing system. Further chapters are devoted to variants of the process of relocation of carsharing vehicles and a separate mathematical model is created for each variant. The conclusion presents the computational experiments with the proposed models and evaluation of the achieved results.

Obsah

Seznam použitých značek a zkratek

a_i kapacita zdroje $i \in I$,

b_i požadavek obsluhovaného vrcholu $i \in N$,

b_j požadavek zákazníka $j \in J$,

c_{ij} celková vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze rozvozu řidičů,

d_{ij} celková vzdálenost v kilometrech při neproduktivním přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$,

e_{ij} celková vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze svozu řidičů,

f_{ij} náklady na přepravu jedné jednotky zboží ze zdroje $i \in I$ k zákazníkovi $j \in J$,

G obecná dopravní síť,

g_{ij} ohodnocení přejezdu z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$,

H množina hran,

I množina zdrojů,

J množina zákazníků,

K kapacita vozidla,

m_i počet vozidel ve vrcholu $i \in N_1$,

m_{ij} bivalentní proměnná vyjadřující přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$,

N množina obsluhovaných vrcholů,

N_0 množina všech vrcholů,

N_1 množina vrcholů reprezentující místa odstavení vozidel,

N_2 množina vrcholů reprezentující cílová místa,

n_j počet vozidel potřebných ve vrcholu $j \in N_2$,

P2P Peer-to-Peer,

R_0^+ množina nezáporných čísel,

TSP Traveling Salesman Problem,

u_o	vrchol představující depo vozidel,
u_i	vrchol představující obsluhovaný vrchol $i \in N$,
u_{ijk}	bivalentní proměnná vyjadřující přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze rozvozu řidičů,
V	množina vozidel,
VRP	Vehicle Routing Problem,
x_{ij}	proměnná vyjadřující objemy přepravy (nebo počet jízd) ze zdroje $i \in I$, k zákazníkovi $j \in J$,
x_{ijk}	bivalentní proměnná vyjadřující přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze svozu řidičů,
y_i	proměnná zabraňující vzniku nepřípustného podcyklu v úloze TSP,
y_{ik}	proměnná zabraňující vzniku nepřípustného podcyklu v úloze VRP,
Z_0^+	množina celých nezáporných čísel,
z_{ij}	bivalentní proměnná vyjadřující neproduktivní přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$.

Úvod

V minulém století byla životní úroveň lidstva a počet nově vyrobených vozidel nižší než dnes. I proto majitelé v dobách, kdy bylo každé vozidlo chápáno jako výraz postavení a úspěchu, mnohdy brali svá vozidla jako něco víc, než jen dopravní prostředek a myšlenka na zapůjčení tohoto plechového člena rodiny byla nemyslitelná, stejně tak jako byla nemyslitelná myšlenka vypůjčení si cizího vozidla. Avšak s nástupem nového tisíciletí přišel i jiný pohled na vlastnictví vozidel, jak ze strany provozovatelů, tak ze strany výrobců. Z vozidel se najednou staly „jen" dopravní prostředky a spotřební zboží, které má snad každý. Lidé na svých vozidlech v dnešní době již tolik nelpí, nemají k nim vztah, a proto jsou častěji ochotni za finanční odměnu své vozidlo propůjčit cizí osobě a zároveň výpůjčka cizího vozidla už není pro případné zájemce tak nemyslitelná. I to je jeden z důvodů, proč se v posledních letech tak velmi rozmáhá carsharing.

Carsharing, v některých státech známé také jako Car clubs, se do češtiny dá přeložit jako sdílení vozidel. O carsharingu v širším slova smyslu se dá hovořit také v případě obyčejného autostopu anebo jízdy s taxislužbou. Neoficiálním carsharingem může být například zapůjčení vozidla v osobním vlastnictví rodinnému příslušníkovi, známému anebo sousedovi pro zcela běžnou přátelskou výpomoc. Oficiální carsharing je však chápán jako možnost podnikání, jehož náplní je buď výpůjčka vlastních vozidel zájemcům o tuto službu, anebo navazování kontaktů mezi majiteli vozidel a zájemci o výpůjčku za účelem společného využívání vozidel.

Mnoho lidí se domnívá, že carsharing je jen jiný název pro služby poskytované autopůjčovnami, ale není to zcela pravda. Carsharing sice v mnohých rysech z klasických autopůjčoven vychází a vykazuje mnoho shodných charakteristických znaků jako služby poskytované autopůjčovnami, ale rozdíly mezi carsharingem a službami poskytovanými autopůjčovnami jsou markantní, výhody carsharingu převládají a v dnešní uspěchané době plné moderních technologií carsharing vystupuje do popředí. Napomáhá tomu i fakt, že klasická autopůjčovna musí spravovat a financovat nejenom svá vozidla, ale také zázemí, na kterém se vozidla nacházejí a uživatelé musí mnohdy pro požadované vozidlo cestovat přes celé město. V případě carsharingu jsou zpravidla vozidla rozmístěna po celém městě na veřejných místech, což je finančně výhodné jak pro pronajímatele, tak docházkově pro uživatele.

Rozmístění vozidel po městě je sice značnou úsporou pro provozovatele, avšak jeho nepříznivým důsledkem je i problém s přemístěním carsharingových vozidel v rámci celého města tak, aby se nevyužitá vozidla neshlukovala v některých uživatelsky neatraktivních lokalitách, přičemž by byl o ně zájem v jiných, atraktivnějších lokalitách. Řešení tohoto problému s převozem do atraktivních lokalit se nazývá relokace vozidel.

Předložená diplomová práce pojednává o charakteristice carsharingu, jeho výhodách i nevýhodách, ale hlavně o řešení zmíněného problému relokace vozidel s využitím vhodných optimalizačních metod.

1. Charakteristika carsharingu

V úvodu bylo hovořeno o tom, co vše se dá zahrnout do pojmu carsharing. Pokud se ovšem hovoří o carsharingu v užším slova smyslu, jedná se o sdílení vozidel organizovanou skupinou lidí, kterým se kvůli malé frekvenci využívání nevyplatí vozidlo vlastnit a provozovat. [1]

Obecně se tvrdí, že využívat carsharing se vyplatí lidem, kteří najedou se svým vozidlem ročně méně než 10 000 km. Nesmí se také ale opomenout, že by se mělo jednat o osoby, které vozidlo nevyužívají každý den a bydlí v lokalitě s dobrou dopravní obslužností městskou hromadnou dopravou. Carsharing totiž není služba, která nahrazuje městskou hromadnou dopravu, ba naopak funguje ve městech, kde je dobrá dopravní obslužnost a pouze ji doplňuje v případech, kdy uživatelé potřebují vozidlo z určitého důvodu. Například se může jednat o větší nákupy, stěhování, jízdu s nemocnou osobou k lékaři, občasné výlety do přírody, za kulturou anebo rodinnou dovolenou. [2]

V mnoha státech světa existují společnosti, které mají své podnikání založené na carsharingu. Tyto společnosti buď figurují jako prostředník mezi lidmi, kteří by rádi pronajali své vlastní vozidlo ostatním zájemcům, anebo mají vlastní flotilu vozidel, která nakupují, pronajímají, dělají průběžný servis a vše potřebné, co je spjato s provozem vozidla. V České republice takové společnosti existují také a jejich služby je možno využít ve většině velkých měst.

1.1. Historie systému carsharing

Sdílení vozidel není koncept, který by vznikl až ve třetím tisíciletí, ale jeho historie sahá už do brzkých poválečných let. Myšlenka vznikla již v roce 1948 ve švýcarském Curychu, kde jedno bytové družstvo začalo pronajímat malé vozidlo, nicméně, v následujících několika letech nedošlo k žádnému formálnímu rozvoji konceptu. [3]

Teprve až v 70. letech 20. století byly ve Francii a Nizozemí zahájeny ambicióznější projekty sdílení vozidel, ovšem jejich životnost se počítá na jednotky roků. V následujících dvou odstavcích budou oba systémy stručně popsány.

Francouzský projekt ProcoTip z roku 1971 provozoval 35 stejných vozidel Simca 1000, které měla otevírání na jeden univerzální klíč poskytnutý během rezervace. Nastartování vozidla bylo možné až po vložení plastového žetonu do speciální schránky na palubní desce. Cena jednoho žetonu byla 10 franků, žeton se dal koupit v obchodech s tabákem a stačil k tomu, aby vozidlo ujelo šestnáct kilometrů. Tento projekt byl o dva roky později ukončen z důvodu neziskovosti. [4]

Nizozemský projekt Witkar (v holandštině „bílé auto“) byl založen na malých dvousedadlových tříkolových elektrických vozidlech a nabíjecích stanicích, rozmístěných po území města Amsterdam. Nabíjecí stanice byla zároveň místa vyzvedávání a odevzdávání vozidel a jejich součástí byl panel, na kterém uživatelé plánovali své cesty. Každý člen dostal při registraci kódovaný magnetický klíč pro přístup do systému a díky němu v počáteční stanici zadal na číselníku cíl cesty. Centrální počítač automaticky zkontroloval, zda je v cílové stanici volné místo a pokud ano, potom se na panelu vedle číselníku rozsvítilo světlo a jízda mohla být zahájena. Tento sofistikovaný systém fungoval až do poloviny 80. let a hlavními důvody vedoucími k jeho ukončení bylo časově náročné nabíjení vozidel, častá jízda jen jedním směrem (vozidla se soustředila jen v některých stanicích) a nedostatečná podpora města. [5]

Stanice s vozidly provozovanými v systému Witkar je znázorněna na obrázku 1.

Obrázek 1: Vozidlo Witkar ve stanici [6]

Do konce minulého tisíciletí existovala celá řada podobných systémů na sdílení vozidel, avšak u většiny z nich nebylo dosaženo dostatečného růstu do té míry, aby byla zajištěna jejich udržitelnost. Nastaly problémy v podobě špatného finančního řízení, migrace obyvatel za města a z toho plynoucí potřeba vlastního vozidla, nedostatečný marketing anebo nedostatečná podpora ze strany veřejné správy. [3]

1.2. Dělení systémů carsharing

Systémy carsharingu obecně spadají do jednoho z pěti modelů sdílení vozidel:

- vázaný carsharing,
- volný carsharing,
- spolujízda,
- částečné vlastnictví vozidel,
- peer-to-peer carsharing.

První dva, vázaný a volný carsharing, lze definovat jako modely, kterými se řídí společnosti zabývající se carsharingem s vlastní flotilou vozidel, nabízející je zájemcům o službu za úplatu.

Zbývající tři modely, spolujízda, částečné vlastnictví a peer-to-peer carsharing, jsou služby, které ve svém základu spojují soukromé osoby – majitele vozidel a potenciální zájemce o jejich používání. Existují společnosti, které za úplatu seznamují pomocí webových stránek nebo mobilních aplikací majitele a nájemce vozidel.

1.2.1. Vázaný carsharing

Vázaný carsharing, nazývaný také zpáteční carsharing, je nejrozsáhlejší typ sdílení vozidel. Typické pro tento systém je, že členové vyzvedávají a odevzdávají vozidlo na stejném místě. Vázaný carsharing je ideální pro nákupy, na schůzky, rodinné výlety mimo město, ale také na dovolenou. [7]

1.2.2. Volný carsharing

Volný carsharing, nazývaný také jednosměrný carsharing, je systém, který poskytuje uživatelům vyšší úroveň služeb než vázaný carsharing. Hlavní výhodou tohoto systému je větší flexibilita, která umožňuje uživateli zanechat vozidlo v cílové destinaci a nemusí jej vrátit do původního místa, ve kterém si vozidlo vyzvednul. Tento druh carsharingu je vhodný pro uživatele, kteří se například po příjezdu na letiště nebo do železniční stanice potřebují dostat do hotelu, na konferenci apod.

V České republice funguje volný carsharing v současné době jen na území hlavního města Prahy a města Brna a společnost provozující tento systém carsharingu dokonce nabízí svým uživatelům možnost volného carsharingu i mezi těmito městy. To znamená vypůjčení jakéhokoliv vozidla určitého typu (společnost vybrala jen určitý typ a značku vozidla pro tento systém volného carsharingu mezi dvěma největšími městy v republice) kdekoliv v Praze a vrácení vozidla kdekoliv v Brně anebo naopak.

Výhoda volného carsharingu však vede k logistickému problému s přemístěním vozidel. Vozidla se mnohdy soustřeďují ve větším počtu v uživatelsky atraktivních výstupních lokalitách, a naopak v jiných lokalitách potom absentují. [7] [8]

1.2.3. Spolujízda

Pokud carsharing znamená sdílení vozidel, tak i spolujízda představuje v širším kontextu systém carsharingu. Spolujízda, známá také pod anglickým názvem carpooling, dává řidiči možnost, jak zaplnit prázdná místa ve vozidle a snížit náklady na své cestování. Pro cestující, kteří sdílejí vozidlo s řidičem, představuje tato varianta pohodlný, rychlý, a hlavně levný způsob přepravy. Tento systém mezi sebou propojuje různé uživatele, kteří mají ve stejný čas společnou cestu a nahrazuje dopravu autobusem, vlakem, ale i autostopem. [9]

1.2.4. Částečné vlastnictví vozidel

Částečné vlastnictví vozidel je systém, v němž se několik nesouvisejících stran může podílet na vlastnictví vozidla a sdílet jeho náklady na provoz, údržbu a opravy v případě, kdy ani jeden uživatel nebude využívat vozidlo na plný úvazek. Všichni uživatelé volí pro přesun po městě raději chůzi, jízdu na kole anebo městskou hromadnou dopravu a vozidlo je pro ně nutné pouze pro výlety mimo město, stěhování velkých předmětů anebo pro jiné zvláštní příležitosti.

Částečné vlastnictví vozidel může být také alternativou k vlastnictví více vozidel v domácnosti s více než jedním řidičem. [10]

1.2.5. Peer-to-peer carsharing

Carsharing typu peer-to-peer, někdy také označovaný jako P2P anebo person-to-person (volně přeloženo jako carsharing mezi lidmi), funguje podobně jako vázaný carsharing, ovšem samotná vozidla jsou v soukromém vlastnictví osob. Stávající majitelé vozidel, kteří využívají svá vozidla jen zřídka, zpřístupňují svá vozidla ostatním zájemcům za určitý poplatek v době, kdy svá vozidla nepoužívají. Osobní vozidla jsou průměrně využívána jen hodinu až dvě denně, což je přibližně 4-8 % celkového času, a proto je tento typ carsharingu výhodný jak pro pronajímatele, tak nájemce. [11]

V konkrétním systému peer-to-peer existuje carsharingová společnost, která nabízí propojení mezi majiteli vozidel a nájemci za pomocí webových stránek nebo mobilních aplikací. Taková společnost řídí rezervace pronájmu, kryje pojištění a silniční asistenci v případě problémů, vybírá platby za použití vozidel, ale také dává nájemcům a majitelům určitou záruku v případě nevracení vozidla, při nepřistavení vozidla anebo při dalších nepříjemných záležitostech spojených s předáváním, provozem anebo odevzdání vozidla. Za tyto služby si většinou účtují 25 až 40 % z celkové platby nájemce. [11]

1.3. Carsharing a současnost

V novém tisíciletí, s nástupem nových komunikačních technologií, reklamy na internetu a zdůrazňování významu ekologického myšlení, začaly vznikat carsharingové společnosti jak je známe dnes. Každým rokem rapidně stoupá jak počet těchto společností, tak i počet pronajímaných vozidel a uživatelů této služby. V květnu roku 2019 nabízelo carsharing celkem 236 společností v 1 328 městech, které se nacházely v 59 státech celého světa. Tabulka 1 obsahuje státy s největšími počty provozovatelů carsharingu. [12]

Tabulka 1: Státy s největšími počty provozovatelů carsharingu [12]

	Celkový počet provozovatelů	Peer-to-peer	Vázaný	Volný
USA	33	7	18	8
Itálie	27	0	16	12
Rusko	21	0	14	11
Kanada	20	2	13	5
Německo	19	3	11	5
Francie	14	1	8	5
Španělsko	11	2	4	5
Velká Británie	9	1	5	3
Čína	8	0	6	2
Austrálie	8	2	6	0

V tabulce 1 se v některých řádcích vyskytuje situace, že celkový počet provozovatelů carsharingu neodpovídá součtu hodnot v ostatních sloupcích. To nastává v případech, kdy někteří provozovatelé nabízejí jak carsharing typu peer-to-peer, tak současně volný anebo vázaný carsharing.

Největšími a nejznámějšími provozovateli carsharingu na světě s mnoha tisíci vozidel jsou například firmy Zipcar (USA), Yandex.Drive (Rusko), ShareNow (Německo), Autolib' (Francie) anebo EvCard (Čína).

Mezi největší provozovatele carsharingu s vlastní flotilou vozidel v České republice patří společnosti CAR4WAY, Autonapůl.cz, AJO carsharing a Anytime carsharing. V tabulce 2 jsou uvedena čtyři největší města České republiky, společnosti zabývající se carsharingem na jejich územích a celkový počet vozidel jimi provozovaných v carsharingu. Informace jsou aktuální ke konci roku 2019.

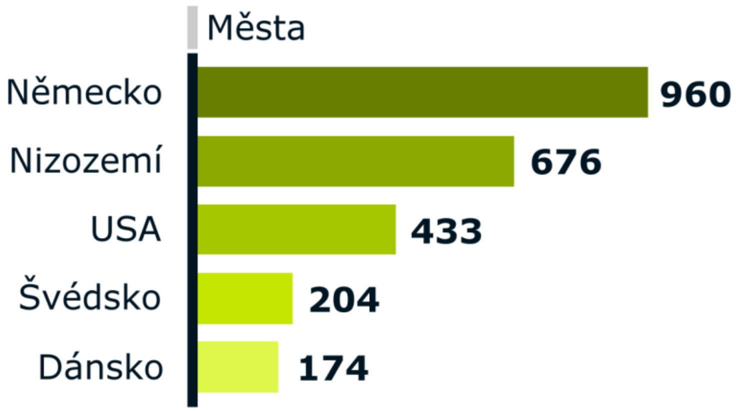
Tabulka 2: Carsharingové společnosti v největších městech ČR

Město	Společnost	Celkový počet vozidel
Praha	CAR4WAY Autonapůl.cz AJO Carsharing Anytime carsharing re.volt Uniqway*	> 700
Brno	CAR4WAY Autonapůl.cz AJO Carsharing	> 120
Ostrava	Autonapůl.cz	3
Plzeň	Autonapůl.cz Karkulka	14
*pro studenty a zaměstnance vysokých škol		

Největší carsharingová společnost v České republice, která propojuje majitele vozidel a nájemce vozidel se jmenuje HoppyGo. Tato společnost měla začátkem roku 2020 k dispozici přes 1 800 vozidel ve 240 městech České republiky. [13]

V posledních letech jsou velkým tématem emise oxidu uhličitého ve výfukových plynech vozidel s konvenčním spalovacím motorem, což zaujalo velkou pozornost nejen médií, ale také politického vedení mnoha států. Podle Evropské komise je silniční doprava největším producentem emisí, a proto Komise stanovila povinné limity pro snižování emisí nových vozidel a zavedla vysoké sankce pro výrobce vozidel, pokud nařízené limity nebudou dodrženy. Aby byly tyto limity splněny, musí výrobci vozidel vyrábět velké množství vozidel na hybridní anebo elektrický pohon.

Protože některé carsharingové společnosti s vlastní flotilou vozidel podporují politiku Komise týkající se snižování emisí, tak všechna jejich vozidla ve vozidlovém parku jsou zcela nová a vybavená nejmodernějšími technologiemi, splňují nejpřísnější emisní limity a ve stále více případech se jedná o vozidla na hybridní pohon anebo čistě elektrický pohon. V roce 2019 bylo 66% všech carsharingových flotil buď elektrických anebo alespoň nabízejících některá elektrická vozidla. Největší provozovatele elektrických vozidel v systému carsharing je možno najít ve Spolkové republice Německo, ve které bylo v roce 2019 přes 960 měst s možností využití sdílených elektrických vozidel. Na obrázku 2 se nachází státy s největším počtem měst, ve kterých jsou v carsharingových flotilách elektrická vozidla. [12]



Obrázek 2: Státy s největším počtem měst, ve kterých jsou v carsharingových flotilách elektrická vozidla [12]

Pokud by se jednalo o státy s největším počtem měst, ve kterých se carsharingové flotily vozidel skládají pouze z elektrických vozidel, pak by žebříček vedla Itálie s více než 55 městy a na druhém místě by byly Spojené státy americké s 10 městy. [12]

Pro uživatele elektrických vozidel v některých carsharingových společnostech může být nevýhodou určitý diskomfort a omezení na rozdíl od vozidel na konvenční anebo hybridní pohon, protože v případě carsharingu s vozidly na elektrický pohon se mnohdy uplatňují vyšší ceny za pronájem vozidel anebo při provozu může docházet k problémům při nabíjení z důvodu nízkého počtu nabíjecích stanic. Naopak výhodou vozidel s elektrickým pohonem může být relativně snadná dostupnost pro osoby, které na pořízení takového vozidla nemají dostatečné finanční prostředky anebo pro osoby, které plánují jeho pořízení a rozhodují se o koupi. [14]

1.4. Výhody systému sdílení vozidel

Carsharing má mnoho výhod a mezi jeho klíčové výhody patří [15] [16]:

- dokáže nahradit až 10 soukromě vlastněných vozidel,
- minimální starost o vozidlo,
- dokonalý přehled o výdajích spojených s provozem vozidla,

- nulové pořizovací náklady na vozidlo,
- výběr z mnoha typů a značek vozidel,
- parkování zdarma ve většině měst,
- dostupnost vozidel pro další obyvatele, kteří by si nemohli vlastní vozidlo dovolit.

V dalším textu práce budou podrobněji popsány první tři výhody.

1.4.1. Snížení počtu vozidel

Vozidlo, které je využíváno pouze jedním řidičem, je používáno v provozu průměrně jen jednu až dvě hodiny denně. Naopak vozidla, která jsou součástí carsharingu a jsou využívána více uživateli, bývají denně v provozu o mnoho déle a mohou nahradit až 10 soukromě vlastněných vozidel. S tím je nepochybně spjato snížení potřeby počtu parkovacích míst ve městech a zisk prostoru pro veřejné využití v podobě parků a dalších míst odpočinku.

Dále bylo zjištěno, že členové carsharingu častěji využívají jiných forem dopravy (pěší chůze, městská hromadná doprava, jízda vlakem nebo na kole) než majitelé vozidel.

S tímto faktem souvisí snížení negativních dopadů spojených s provozem vozidel, jako je například snížení čerpání neobnovitelných zdrojů, snížení počtu dopravních nehod a kongescí, snížení nepříznivých klimatických podmínek způsobených emisemi a v neposlední řadě také snížení nadměrného hluku a vibrace v ulicích vznikajících aerodynamickým hlukem, hlukem motoru a kontaktem pneumatik s vozovkou. [15]

1.4.2. Minimální starost o vozidlo

Zájemci o služby carsharingových společností se na rozdíl od majitelů soukromých vozidel nestarají o provoz vozidla, dokonce ani v některých případech nemusí řešit tankování pohonných hmot. O tankování pohonných hmot se stará carsharingová společnost, které vozidla patří, popřípadě majitel vozidla, který vozidlo půjčuje, avšak v krajní nouzi, kdy nájemce ujede více kilometrů, než je schopno vozidlo na jednu plnou palivovou nádrž ujet, anebo pokud nájemce dostane vozidlo s malým množstvím pohonných hmot, může je doplnit sám a dostává slevu z celkové ceny za pronájem.

Tímto jediným problémem prakticky začíná a končí starost o pronajaté vozidlo, protože v ceně pronájmu vozidla jsou započítány veškeré poplatky a výdaje spojené s provozem vozidla. Jedná se jak o údržbu vozidla periodickou (výměna pneumatik, provozních kapalin), tak i o údržbu po poruše, o návštěvy stanic technické kontroly, výdaje spojené s pojištěním odpovědnosti z provozu vozidla anebo havarijním pojištěním a v neposlední řadě má většina pronajímaných vozidel v ceně aktuální dálniční známky jak pro území daného státu, tak i pro území států sousedních. [1] [14]

1.4.3. Přehled o výdajích

Jelikož při využívání vozidel nájemce zná přesně stanovenou cenu za ujetý kilometr a za daný čas, ve kterém má vozidlo v pronájmu, má také dokonalý přehled o výdajích spojených s provozem vozidla.

Pro dokonalý přehled o všech výdajích existuje aplikace, ve které si uživatel vybere a pronajme vozidlo, přičemž v aplikaci existuje sekce vyúčtování, v níž se objevují veškeré cesty pronajatými vozidly a jejich konečné ceny. Takové vyúčtování je vyobrazeno na obrázku 3. [17]

Obrázek 3: Vyúčtování v carsharingové aplikaci [17]

V některých carsharingových společnostech dostává uživatel po každé jízdě vyúčtování e-mailem. Obdrží informaci také o tom, kolik bylo účtováno z předplacené částky a kolik peněz aktuálně zbývá na další pronájem. [18]

1.5. Nevýhody systému sdílení vozidel

Tak jako má carsharing celou řadu výhod, má také i své nevýhody. Mezi rozhodující patří:

- nutnost docházkové vzdálenosti (vozidla v systému zpravidla neparkují před domem uživatele),
- časová nedostupnost vozidel (vozidlo nebude v čase, kdy jej uživatel vyžaduje, k dispozici),
- nutnost včasné rezervace vozidla v lokalitách s vyšší mírou využívání systému sdílení vozidel,
- nejistota, zda je vozidlo v dobrém technickém stavu,
- při překročení najetých kilometrů jsou většinou uloženy další poplatky,
- výbava vozidel nemusí odpovídat představám uživatele,
- při paušální platbě uživatel nedbá na spotřebu paliva a na opotřebování vozidla.

V dalším textu práce budou podrobněji popsány první tři nevýhody.

1.5.1. Nutnost docházkové vzdálenosti

Hlavní nevýhodou carsharingu je nemožnost stále parkovat vozidlo před vlastním domem v době, kdy ho nemá uživatel v pronájmu. Vozidla jsou rozmístěna na předem určených stanovištích anebo v daných částech obce, a proto se každý uživatel, účastnící se programu sdílení vozidel, musí dostat z místa bydliště až na místo parkování vozidla, což zabere více času než docházení k vlastnímu vozidlu. Často přitom nevyužívá jen chůzi, ale musí využít městskou hromadnou dopravu, a proto je potřebný i další čas k plánování cesty k vozidlu. [15] [16]

1.5.2. Časová nedostupnost vozidel

Přestože je každým rokem stále větší počet vozidel, která jsou zapojena do programu carsharing, tak přímo úměrně roste i poptávka ze strany zájemců o tyto vozidla. Proto není vždy zaručeno, hlavně ve větších městech, že poptávka bude uspokojena. Existuje tedy možnost, že vozidlo, o které má uživatel zájem, nebude kdykoliv k dispozici. Z tohoto důvodů je často nezbytné si vozidlo rezervovat dříve, přestože systém umožňuje rezervaci až do několika minut před jeho použitím. [16]

Ve státech, kde se carsharing hojně využívá (například Spolková republika Německo nebo státy Severní Ameriky) dochází k případům, že mnoho uživatelů v době dopravní špičky nemůže v aplikaci najít vhodné vozidlo ve své blízkosti pro svou potřebu a musí použít vozidlo, které je ve větší vzdálenosti, což je dost nepohodlné, zejména v případě nepříznivého počasí. Avšak mohou nastat i období, kdy ani do jedné hodiny cestování z místa bydliště nebudou v okolí vůbec žádná vozidla k pronájmu. [19]

1.5.3. Nutnost včasné rezervace vozidla v lokalitách s vyšší mírou využívání systému sdílení vozidel

V lokalitách, kde se carsharing hojně využívá, se může stát, že vozidlo které uživatel potřebuje, nebude v daném termínu k dispozici anebo bude k dispozici na kratší čas, než je pro uživatele vhodné, tedy možnost využívání vozidla je limitována dalšími uživateli systému.

Aby se tomuto problému předcházelo, je nutné si svou jízdu s potřebným časovým předstihem důkladně naplánovat s ohledem na časovou náročnost jízdy a účel použití vozidla (výběr určitého typu či velikosti). Pokud si zájemce s vidinou finanční úspory pronajme vozidlo na kratší dobu a dojde ke zpoždění, tak je nutné informovat dispečink a dochází k penalizaci, popřípadě se může stát, že pronájem vozidla nepůjde prodloužit a nájemce bude nucen vozidlo předat dalšímu uživateli bez ohledu na to, zda vozidlo využil pro plánovaný účel anebo ne. [15] [16]

1.6. Popis přepravního procesu

Přepravní proces v systému sdílení vozidel se v mnohém liší od přepravního procesu s vlastním vozidlem, a proto je následující část práce rozdělena do několika bodů:

- prvotní registrace,
- rezervace vozidla,
- převzetí vozidla,
- jízda ve vozidle,
- ukončení cesty.

1.6.1. Prvotní registrace

Registrace a uzavření smlouvy nových členů, kteří chtějí využívat carsharingové služby probíhá pouze jednou, na rozdíl od běžných autopůjčoven. V každé carsharingové společnosti může probíhat registrace jiným způsobem, avšak všude trvá jen několik málo minut, přičemž stačí mít telefon anebo počítač připojený k síti. Registrace nejčastěji probíhá pomocí ověření emailové adresy. Po ověření se budoucí uživatel přihlásí do mobilní aplikace, ve které vyfotí doklad totožnosti a řidičský průkaz a vyplní své osobní údaje ručně. Z přiložených dokladů a údajů služba zjišťuje totožnost uživatele, věk, bonitu, ale také platné řidičské oprávnění pro vozidla skupiny B. V případě kladného ověření stačí zadat kreditní kartu, ze které budou účtovány transakce za pronájem vozidel. V posledním kroku uživatel pouze čeká na zaslání identifikačních údajů, popřípadě čipové karty, se kterou obsluhuje vstup do vozidel.

Někteří poskytovatelé služeb požadují pro kladné provedení registrace určité podmínky, jako je například vlastnění řidičského oprávnění po určitou dobu (někdy i pět let) anebo složení vratné vstupní kauce. V některých případech je účtován jednorázový poplatek, po jehož zaplacení je zaslána čipová karta. [11] [17]

1.6.2. Rezervace vozidla

Rezervaci vozidla je možno provádět předem buď pomocí webových stránek nebo mobilní aplikace nebo telefonicky. Pokud uživatel potřebuje konkrétní vozidlo na delší časový úsek, je vhodné jej rezervovat několik týdnů či měsíců před vypůjčením. Pokud ovšem uživatel potřebuje jakékoliv vozidlo na krátký čas, někdy jen hodinu, je možné si volné vozidlo rezervovat i těsně před vyzvednutím. Při každé rezervací je nutné mít na zadané kreditní kartě dostatek finančních prostředků a mít povoleny internetové platby. V opačném případě by rezervace nemohla být závazně potvrzena.

V aplikaci se vozidla vyhledávají pomocí zadané lokace anebo termínu. Díky filtrům si může uživatel vyhledat vozidla konkrétní značky, podle účelu použití nebo podle jiných specifikací. U každého vozidla se nachází fotografie, detailní popis vozidla, výbava, cena za hodinu anebo za den a další potřebné informace. Pokud se zájemce rozhodne vypůjčit si konkrétní vozidlo, vybere přesný termín, ve kterém bude mít o zapůjčení zájem a zjistí dostupnost vozidla. Pokud je vozidlo dostupné, zobrazí se plná cena za službu a vozidlo je možno rezervovat a zapůjčení zaplatit. [11]

1.6.3. Převzetí vozidla

Postup převzetí vozidla se liší podle typu systému sdílení vozidel. Pokud se jedná o carsharing typu peer-to-peer, kde je vlastní vozidlo půjčováno soukromou osobou jiné osobě, tak po závazné rezervaci dochází k aktivaci možnosti telefonického kontaktu s majitelem vozidla a domluvení přesných detailů předávky vozidla. Při fyzickém převzetí musí mít nájemce u sebe identický doklad totožnosti a řidičský průkaz, který byl nahrán při registraci do aplikace. Tyto doklady jsou ověřeny majitelem vozidla. Po ověření dochází k předání klíčů, osvědčení o registraci vozidla a platného pojištění odpovědnosti z provozu vozidla (zelená karta). Je doporučeno, aby si nájemce zkontroloval počet najetých kilometrů na palubní desce vozidla, stav paliva v nádrži a vyfotil exteriér i interiér vozidla, počítadlo kilometrů a celkový stav vozidla pro případné řešení pojistných událostí nebo kompenzací za vzniklé drobné škody. [11]

V druhém případě, kdy pronájem vozidel poskytuje carsharingová společnost s vlastní flotilou vozidel je převzetí vozidla bez přítomnosti pronajímatele jen za pomocí čipové karty anebo mobilního telefonu. Ještě před příchodem a použitím vozidla obdrží nájemce informace o aktuální poloze vozidla a PIN k tankovací kartě. Při příchodu k vozidlu si nájemce odemyká vozidlo pomocí čipové karty, kterou obdrží po úspěšné registraci, popřípadě dochází k odemykání za pomocí mobilního telefonu. Kartu přiloží na čtečku za předním sklem a vozidlo se odemkne. Princip odemykání vozidla za pomocí čtečky a čipové karty je zobrazeno na obrázku 4.

Obrázek 4: Odemykání vozidla pomocí čipové karty [20]

V některých společnostech lze místo karty použít vlastní mobilní telefon. Klíče od vozidla a tankovací karta se nachází v přihrádce spolujezdce. Tak jako u peer-to-peer převzetí vozidla, i zde se doporučuje před každou jízdou zkontrolovat stav vozidla, povinnou výbavu a případně detailně nafotit vozidlo. [14]

1.6.4. Jízda ve vozidle

Jízda v pronajatém vozidle probíhá obdobně jako u soukromého vozidla, avšak mohou existovat různá další pravidla, která se musí dodržovat. V některých společnostech musí vozidlo obsluhovat a řídit pouze osoba, která si vozidlo pronajala, v jiných společnostech může být vozidlo zapůjčeno i jiné osobě, avšak nájemce musí být přítomen a nese veškerou odpovědnost na vozidle. Je nutné dbát na pravidla silničního provozu a na pravidla, která zadal majitel (zákaz kouření ve vozidle, zákaz přepravy zvířat, zákaz cestování mimo ČR apod.). Pokud uživatel poruší pravidla silničního provozu a je za ně postihován, odpovědnost nese sám.

Pokud uživatel potřebuje během svého pronájmu vozidlo opustit a zamknout, použije standardně klíč z přihrádky. V případě uzamčení vozidla čipovou kartou se pronájem ukončí a uživatel se zpět do vozidla nedostane. Pokud však chce uživatel pronájem ukončit, vloží klíč zpět do přihrádky a vozidlo uzamkne přiložením čipové karty na čtečku za čelním sklem.

Jak již bylo zmíněno v podkapitole týkající se převzetí vozidla, v některých typech vozidel se nachází tankovací karta, se kterou uživatel v případě potřeby provádí platbu za pohonné hmoty, takže při jízdě nemusí mít u sebe hotovost ani osobní platební kartu. Pokud dojde při jízdě k nutnosti tankovat v době pronájmu palivo, získává v mnoha společnostech uživatel bonus za určitý diskomfort v podobě celkové slevy za užívání anebo prodloužení doby rezervace.

Žádné vozidlo není bezporuchové, a proto, pokud dojde k poruše během jízdy v pronajatém vozidle, je uživatel povinen tuto skutečnost oznámit na dispečink anebo v případě peer-to-peer přímo majiteli vozidla. Podobná ohlašovací pravidla platí také pro případ vzniku dopravní nehody. [1] [11] [14]

1.6.5. Ukončení cesty

Některé společnosti nabízejí možnost vrátit vozidlo v jiném městě, avšak v takovém, ve kterém funguje jejich služba carsharingu. Některé společnosti naopak vyžadují, aby vozidla byla vrácena na stejném místě, ve kterém byla vyzvednuta a existují i takové, které dovolují vrátit vozidlo ve stejném městě, avšak na jiném místě. Při peer-to-peer carsharingu se vozidlo vrací na stejném místě u majitele, pokud není s majitelem dohodnuto jinak.

Po zaparkování vozidla uživatel zkontroluje, zda je vozidlo řádně zabezpečeno proti pohybu i proti vniknutí (zavřená okna) a zkontroluje přítomnost klíčů a tankovací karty v přihrádce. Pokud je vše v pořádku, rezervaci ukončí přiložením čipové karty na čtečku za čelním sklem. V případě zapomenutí osobních věcí ve vozidle se v některých případech musí vytvořit nová objednávka, která se po vyzvednutí věcí stornuje anebo je někdy možné s čipovou kartou otevřít vozidlo, avšak k nastartování nedojde.

Může se stát, že nájemce neodhadne čas, po který chce využívat vozidlo. V případě předčasného vracení není povinen informovat zprostředkovatele služby, avšak zaplatí celou původní částku za výpůjčku. Jedná-li se o peer-to-peer carsharing, předčasné ukončení musí konzultovat s majitelem pronajímaného vozidla. V opačném případě, kdy nájemce má zájem prodloužit pronájem, musí kontaktovat zprostředkovatele služby, popřípadě majitele a informovat se o možnostech prodloužení pronájmu vozidla. [11] [14]

2. Teoretická východiska řešení

Pro matematické modelování systému carsharing byl vybrán systém volného carsharingu.

K matematickému modelování zvoleného typu systému podrobněji charakterizovaného v Kapitole 1 budou využity následující čtyři optimalizační úlohy:

- dopravní úloha,
- přiřaďovací problém,
- Vehicle Routing Problem,
- Traveling Salesman Problem.

Každá z uvedených optimalizačních úloh bude v následujícím textu matematicky zformulována a bude uveden matematický model pro její řešení složený z účelové funkce a soustavy omezujících podmínek.

Účelová funkce v modelech obecně umožňuje posuzování kvality jednotlivých přípustných řešení z pohledu optimalizované veličiny (například celkové náklady na přepravu, celková ujetá vzdálenost, zisk apod.). K účelové funkci se dále uvádí hledaný typ extrému (minimum nebo maximum). Typ extrému se volí podle povahy optimalizované veličiny (např. u nákladů to je minimum, u zisku to je maximum apod.). Modely mohou mít jednu i více účelových funkcí.

Omezující podmínky v modelech se zpravidla dělí do dvou skupin – na strukturální a obligatorní. Strukturální podmínky definují reálná omezení, která plynou ze zadaného konkrétního problému (například podmínka může zajišťovat, že ze zdroje nelze přepravit více komodity, než se v daném zdroji nachází). Strukturální podmínky mohou také vytvářet logické vazby mezi rozhodnutími různého typu. Obligatorní podmínky vymezují definiční obory proměnných vystupujících v modelu.

Veličiny v matematických modelech mohou být buď konstantami, nebo proměnnými. Hodnoty konstant se v průběhu výpočtu nemění a reprezentují vstupy do úlohy (například kapacita zdroje, kapacita vozidla, požadavek spotřebitele atd.). Hodnoty proměnných se v průběhu výpočtu mění a za pomocí proměnných modelujeme rozhodnutí, která se od řešitelů očekávají (navržené řešení). V lineárním programování, do kterého spadají všechny čtyři výše uvedené optimalizační úlohy, se v případě proměnných používají tři typy definičních oborů. Množina nezáporných čísel (dále v textu označená R_0^+), množina celých nezáporných čísel (dále v textu označená Z_0^+) a množina hodnot 0 nebo 1 (dále v textu označená {0;1}).

2.1. Dopravní úloha

Dopravní úloha je jednou z mnoha typových úloh matematického programování. Jedná se o lineární optimalizační úlohu, jejímž cílem je minimalizovat celkové náklady na přepravu, popřípadě minimalizovat celkovou vzdálenost absolvovanou při plnění požadavků spotřebitelů ze zdrojů.

Dopravní úlohy v základním tvaru se zpravidla dělí na vybilancované a nevybilancované. Nevybilancované dopravní úlohy se potom dělí na nevybilancované úlohy s přebytkem kapacit zdrojů a nevybilancované úlohy s nedostatkem kapacit zdrojů. [21]

2.1.1. Obecná formulace dopravní úlohy

Je dána množina zdrojů označená I a množina zákazníků označená J. Pro každý zdroj $i \in I$ je známa jeho kapacita a_i, pro každého zákazníka $j \in J$ je znám jeho požadavek b_j. Dále je známa matice jednotkových přepravních nákladů mezi zdroji a zákazníky, přičemž prvek této matice f_{ij} vyjadřuje náklady na přepravu jedné jednotky komodity (nebo ujetou vzdálenost) z i-tého zdroje k j-tému zákazníkovi.

Úkolem dopravní úlohy je naplánovat proces splnění požadavků zákazníků tak, aby se minimalizovaly celkové náklady na přepravu (celková ujetá vzdálenost).

Množinami v dopravní úloze tedy budou:

- I – množina zdrojů,
- J – množina zákazníků.

Konstantami v dopravní úloze tedy budou:

- a_i – kapacita zdroje $i \in I$,
- b_j – požadavek zákazníka $j \in J$,
- f_{ij} – náklady na přepravu jedné jednotky zboží ze zdroje $i \in I$ k zákazníkovi $j \in J$ (ujetá vzdálenost ze zdroje $i \in I$ k zákazníkovi $j \in J$).

V modelu je dále zavedena skupina nezáporných proměnných x_{ij} pro $i \in I$ a $j \in J$, které vyjadřují objemy přepravy (nebo počet jízd) ze zdroje $i \in I$ k zákazníkovi $j \in J$.

2.1.2. Matematický model vybilancované dopravní úlohy

Vybilancovaná dopravní úloha je dopravní úloha, ve které je součet kapacit všech zdrojů roven součtu požadavků všech spotřebitelů. Matematickým zápisem:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$$

Model vybilancované dopravní úlohy má tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij} x_{ij} \qquad (2.1.2.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = a_i \qquad pro\ i \in I \qquad (2.1.2.2)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = b_j \qquad pro\ \ j \in J \qquad (2.1.2.3)$$

$$x_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in I\ a\ \ j \in J \qquad (2.1.2.4)$$

Funkce (2.1.2.1) reprezentuje optimalizační kritérium – celkové náklady vynaložené na přepravu komodity (nebo celková ujetá vzdálenost). Skupina strukturálních omezujících podmínek (2.1.2.2) zabezpečuje, že kapacita každého zdroje bude vyčerpána, skupina strukturálních omezujících podmínek (2.1.2.3) zabezpečuje, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny a skupina obligatorních omezujících podmínek (2.1.2.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu. [21]

2.1.3. Matematický model nevybilancované dopravní úlohy s přebytkem kapacit zdrojů

Nevybilancovaná dopravní úloha s přebytkem kapacit zdrojů je dopravní úloha, ve které součet kapacit všech zdrojů překračuje součet požadavků všech spotřebitelů. Matematickým zápisem:

$$\sum_{i \in I} a_i > \sum_{j \in J} b_j$$

Model nevybilancované dopravní úlohy s přebytkem kapacit zdrojů má tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij} x_{ij} \qquad (2.1.3.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \le a_i \qquad pro\ i \in I \qquad (2.1.3.2)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = b_j \qquad pro\ \ j \in J \qquad (2.1.3.3)$$

$$x_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in I\ a\ \ j \in J \qquad (2.1.3.4)$$

Funkce (2.1.3.1) reprezentuje optimalizační kritérium – celkové náklady vynaložené na přepravu komodity (nebo celková ujetá vzdálenost). Skupina strukturálních omezujících podmínek (2.1.3.2) zabezpečuje, že kapacita žádného ze zdrojů nebude překročena, skupina strukturálních omezujících podmínek (2.1.3.3) zabezpečuje, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny a skupina obligatorních omezujících podmínek (2.1.3.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu. [21]

2.1.4. Matematický model nevybilancované dopravní úlohy s nedostatkem kapacit zdrojů

Nevybilancovaná dopravní úloha s nedostatkem kapacit zdrojů je dopravní úloha, ve které je součet kapacit všech zdrojů menší než součet požadavků všech spotřebitelů. Matematickým zápisem:

$$\sum_{i\in I} a_i < \sum_{j\in J} b_j$$

Model nevybilancované dopravní úlohy s nedostatkem kapacit zdrojů má tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} f_{ij} x_{ij} \qquad (2.1.4.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = a_i \qquad pro\ i \in I \qquad (2.1.4.2)$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le b_j \qquad pro\ j \in J \qquad (2.1.4.3)$$

$$x_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in I\ a\ j \in J \qquad (2.1.4.4)$$

Funkce (2.1.4.1) reprezentuje optimalizační kritérium – celkové náklady vynaložené na přepravu zboží (nebo celková ujetá vzdálenost). Skupina strukturálních omezujících podmínek (2.1.4.2) zabezpečuje, že kapacita každého zdroje bude vyčerpána, skupina strukturálních omezujících podmínek (2.1.4.3) zabezpečuje, že požadavek žádného ze zákazníků nebude překročen a skupina obligatorních omezujících podmínek (2.1.4.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu. [21]

2.2. Přiřaďovací problém

Přiřaďovací problém je speciálním případem dopravní úlohy, ve kterém jsou kapacity zdrojů a požadavky zákazníků jednotkové. Protože se jedná o speciální případ dopravní úlohy, vyskytují se i u přiřaďovacího problému tři varianty – vybilancovaný přiřaďovací problém (v takovém případě platí, že $|I| = |J|$), nevybilancovaný přiřaďovací problém s přebytkem kapacit zdrojů (zde je možno použít ekvivalent s přebytkem zdrojů) a nevybilancovaný přiřaďovací problém s nedostatkem kapacit zdrojů (ekvivalent s nedostatkem zdrojů). Významy symbolů I a J jsou shodné jako v případě dopravní úlohy, konstantu f_{ij} jako náklady plynoucí z přiřazení zákazníka $j \in J$ zdroji $i \in I$ (ujetá vzdálenost ze zdroje $i \in I$ k zákazníkovi $j \in J$).

2.2.1. Matematický model vybilancovaného přiřaďovacího problému

Matematický model vybilancovaného přiřaďovacího problému má tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij} x_{ij} \qquad (2.2.1.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in I \qquad (2.2.1.2)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in J \qquad (2.2.1.3)$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in I\ a\ j \in J \qquad (2.2.1.4)$$

Funkce (2.2.1.1) reprezentuje optimalizační kritérium – celkové náklady (nebo celková ujetá vzdálenost) plynoucí z přiřazení. Skupina strukturálních omezujících podmínek (2.2.1.2) zabezpečuje, že kapacita každého zdroje bude vyčerpán, skupina strukturálních omezujících podmínek (2.2.1.3) zabezpečuje, že požadavky všech zákazníků budou splněny a skupina obligatorních omezujících podmínek (2.2.1.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

2.2.2. Matematický model nevybilancovaného přiřaďovacího problému s přebytkem kapacit zdrojů

Matematický model nevybilancovaného přiřaďovacího problému s přebytkem kapacit zdrojů má tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} f_{ij}x_{ij} \tag{2.2.2.1}$$

za podmínek:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \le 1 \qquad pro\ i \in I \tag{2.2.2.2}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in J \tag{2.2.2.3}$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in I\ a\ j \in J \tag{2.2.2.4}$$

Funkce (2.2.2.1) reprezentuje optimalizační kritérium – celkové náklady (nebo celková ujetá vzdálenost) plynoucí z přiřazení. Skupina strukturálních omezujících podmínek (2.2.2.2) zabezpečuje, že kapacita žádného ze zdrojů nebude překročena, skupina strukturálních omezujících podmínek (2.2.2.3) zabezpečuje, že požadavky všech spotřebitelů budou splněny a skupina obligatorních omezujících podmínek (2.2.2.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

2.2.3. Matematický model nevybilancovaného přiřaďovacího problému s nedostatkem kapacit zdrojů

Matematický model nevybilancovaného přiřaďovacího problému s nedostatkem kapacit zdrojů má tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} f_{ij}x_{ij} \tag{2.2.3.1}$$

za podmínek:

$$\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in I \tag{2.2.3.2}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le 1 \qquad pro\ j \in J \tag{2.2.3.3}$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in I\ a\ j \in J \tag{2.2.3.4}$$

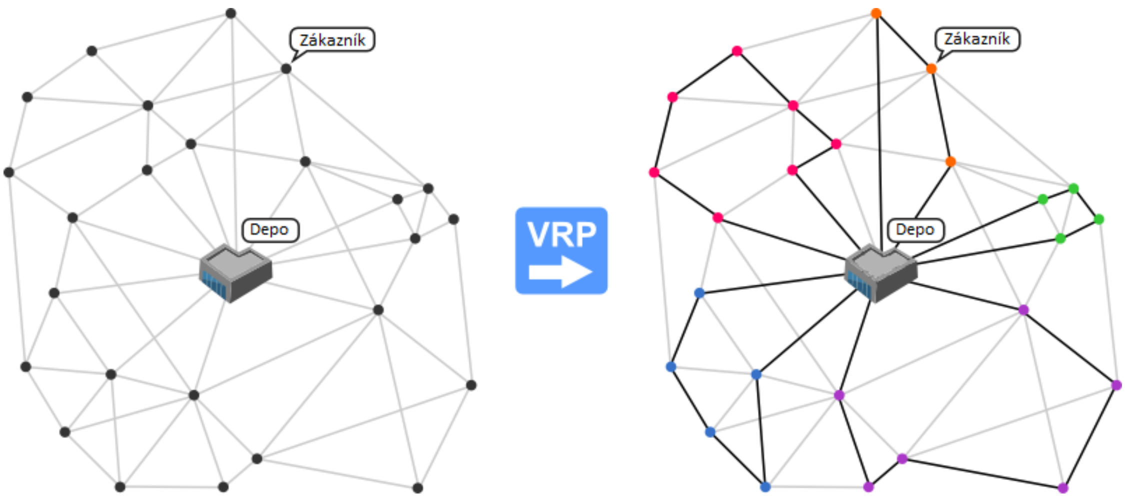
Funkce (2.2.3.1) reprezentuje optimalizační kritérium – celkové náklady (nebo celková ujetá vzdálenost) plynoucí z přiřazení. Skupina strukturálních omezujících podmínek

(2.2.3.2) zabezpečuje, že kapacita každého zdroje bude vyčerpána, skupina strukturálních omezujících podmínek (2.2.3.3) zabezpečuje, že požadavek žádného ze zákazníků nebude překročen a skupina obligatorních omezujících podmínek (2.2.3.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

2.3. Vehicle Routing Problem

Úlohu VRP (Vehicle Routing Problem – do češtiny volně přeloženo jako problém okružních jízd) lze definovat jako problém hledání optimálních tras pro rozvoz nebo svoz zásilek při splnění následujících omezení:

- každý zákazník je obsloužen právě jednou,
- musí být respektována omezená kapacita vozidel,
- všechny trasy vozidel začínají a končí v depu.



Obrázek 5: Příklad VRP (vlevo) a jeho možného řešení (vpravo) [22]

Úloha Vehicle Routing Problem byla poprvé formulována v říjnu roku 1959 G. B. Dantzigem aj. H. Ramserem v článku s názvem The Truck Dispatching Problem. [23] Jedná se o zobecnění a rozšíření úlohy TSP (Traveling Salesman Problem – do češtiny volně přeloženo jako problém obchodního cestujícího). Od doby publikování článku vzniklo mnoho variant úloh založených na úloze VRP a v dnešní době se v mnoha distribučních procesech počítá s úlohou VRP anebo jejími dalšími variantami, díky čemuž jsou často dosahovány úspory v rozsahu od 5% do 20% nákladů na dopravu. Úlohu lze využít v mnoha případech, jako je například svoz domácího odpadu, distribuce zboží od výrobce do obchodů, rozvoz pošty a balíků, ale v neposlední řadě lze tuto úlohu využít také při plánování oběhů vozidel (například autobusy veřejné dopravy anebo hnací vozidla). [24]

2.3.1. Formulace úlohy Vehicle Routing Problem

Klasický model Vehicle Routing Problem lze definovat na obecné dopravní síti $G = (N_0, H)$, kde N představuje množinu obsluhovaných vrcholů dopravní sítě, N_0 reprezentuje množinu obsluhovaných vrcholů doplněnou o depo vozidel a H představuje množinu hran spojujících tyto vrcholy. Vrchol u_o představuje depo vozidel a vrcholy u_i, kde $i \in N$, reprezentují obsluhované vrcholy. V každém obsluhovaném vrcholu u_i vzniká požadavek b_i. Dále je dána matice nákladů na přejezdy vozidla mezi jednotlivými vrcholy (obsluhovanými vrcholy včetně depa vozidel) značené symbolem g_{ij}. Přeprava do obsluhovaných vrcholů je vykonávána množinou vozidel V o homogenní kapacitě K.

Cílem tohoto problému je navrhnout trasy vozidel tak, aby byl každý obsluhovaný vrchol navštíven právě jednou, nebyla překročena definovaná kapacita vozidel a celkové náklady na (neproduktivní) přejezdy nebo celková ujetá (neproduktivní) vzdálenost byla minimální. [25]

V úloze vystupují čtyři množiny:

- N – množina obsluhovaných vrcholů,
- N_0 – množina všech vrcholů ($N \cup \{u_0\}$),
- H – množina hran,
- V – množina vozidel.

Konstantami v úloze budou:

- b_i – požadavek obsluhovaného vrcholu $i \in N$,
- g_{ij} – ohodnocení přejezdu z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ (v situaci, kdy $i = j$ platí, že $g_{ij} = M$, kde M je prohibitivní konstanta),
- K – kapacita vozidla (je uvažováno s homogenním vozidlovým parkem z hlediska kapacit obslužných vozidel).

Proměnná x_{ijk} modeluje rozhodnutí o přejezdu vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$. Protože se jedná o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, volí se definiční obor $\{0;1\}$. V rámci řešené úlohy bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $x_{ijk} = 1$, potom přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ se uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $x_{ijk} = 0$, potom přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ se neuskuteční.

Další skupina proměnných je tvořena skupinou nezáporných proměnných y_{ik}, jejichž jedinou funkcí je zabránit vzniku nepřípustného podcyklu (například okružní jízda, která neprochází depem vozidel).

2.3.2. Matematický model úlohy

Matematický model úlohy Vehicle Routing Problem má tvar:

$$min\, f(x,y) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} g_{ij} x_{ijk} \tag{2.3.2.1}$$

za podmínek:

$$\sum_{\substack{i \in N_o \\ i \neq j}} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N \tag{2.3.2.2}$$

$$\sum_{\substack{i \in N_o \\ i \neq j}} x_{ijk} = \sum_{\substack{i \in N_o \\ i \neq j}} x_{jik} \qquad pro\ j \in N, k \in V \tag{2.3.2.3}$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{2.3.2.4}$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{2.3.2.5}$$

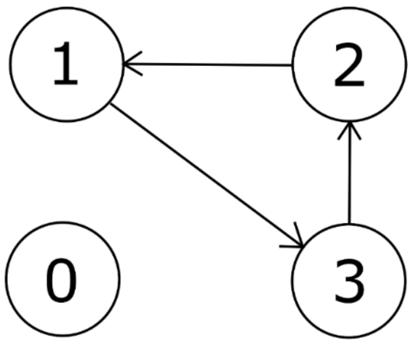
$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N, k \in V \tag{2.3.2.6}$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N} b_j x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{2.3.2.7}$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \tag{2.3.2.8}$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{2.3.2.9}$$

Funkce (2.3.2.1) reprezentuje optimalizační kritérium – minimální celkové ohodnocení neproduktivních přejezdů. Skupina omezujících podmínek (2.3.2.2) zajistí, že každý vrchol bude obsloužen právě jednou a právě jedním vozidlem. Skupina podmínek (2.3.2.3) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (2.3.2.4) zajistí, že každé vozidlo vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (2.3.2.5) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (2.3.2.6) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Jedno z možných nepřípustných řešení je uvedeno na obrázku 6.

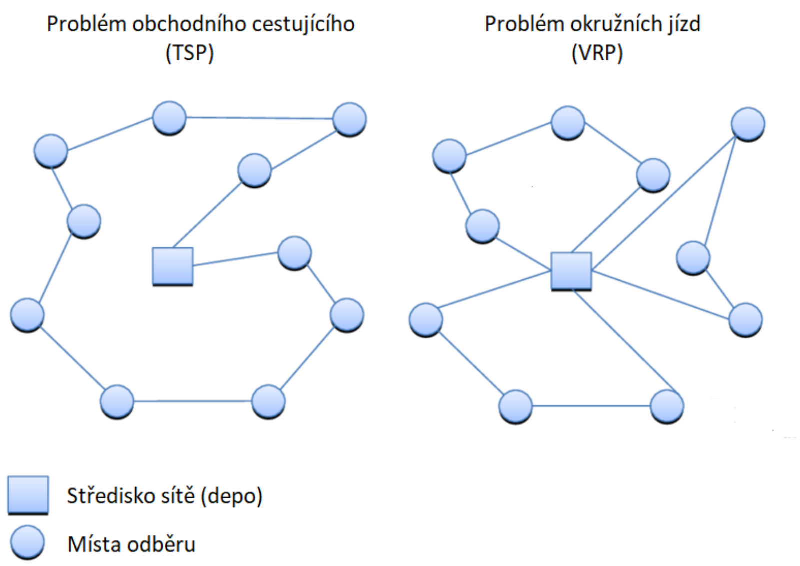


Obrázek 6: Příklad nepřípustného řešení (okružní jízda neprochází depem vozidel)

Skupina omezujících podmínek (2.3.2.7) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (2.3.2.8) a (2.3.2.9) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

2.4. Traveling Salesman Problem

Úloha TSP (Traveling Salesman Problem – do češtiny volně přeloženo jako problém obchodního cestujícího) je velmi podobná úloze z podkapitoly 2.3, které se také někdy říká úloha násobného obchodního cestujícího. Základní rozdíl mezi těmito dvěma typy úloh je ten, že v úloze TSP lze požadavky obsluhovaných vrcholů splnit jednou okružní jízdou. Rozdíl mezi úlohou TSP a úlohou VRP je znázorněn na obrázku 7.



Obrázek 7: Rozdíl mezi úlohami TSP a VRP

Úloha TSP je speciálním případem úlohy VRP, ve které se vyskytuje pouze jedno vozidlo. Na rozdíl od úlohy VRP je tedy možno vynechat v označení jednotlivých veličin index vozidla.

Proměnnými v úloze budou:

Proměnná m_{ij} modeluje rozhodnutí o přejezdu vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$. Opět se bude jednat o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, volí se tedy definiční obor $\{0;1\}$. V rámci řešené úlohy bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $m_{ij} = 1$, potom přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ se uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $m_{ij} = 0$, potom přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ se neuskuteční.

Další skupina proměnných je tvořena skupinou nezáporných proměnných y_i, jejíchž jedinou funkcí je zabránit vzniku nepřípustného podcyklu (například okružní jízda, která neprochází depem vozidel).

Matematický model úlohy Traveling Salesman Problem bude mít tvar:

$$min\, f(x,y) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} g_{ij} m_{ij} \tag{2.4.1}$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} m_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in N \tag{2.4.2}$$

$$\sum_{\substack{i \in N_o \\ i \neq j}} m_{ij} = \sum_{\substack{i \in N_o \\ i \neq j}} m_{ji} \qquad pro\ j \in N_o \tag{2.4.3}$$

$$y_i - y_j + n \cdot m_{ij} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N \tag{2.4.4}$$

$$m_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o \tag{2.4.5}$$

$$y_i \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N \tag{2.4.6}$$

Funkce (2.4.1) reprezentuje optimalizační kritérium – minimální celkové ohodnocení neproduktivních přejezdů. Skupina omezujících podmínek (2.4.2) zajistí, že každý vrchol bude obsloužen. Skupina podmínek (2.4.3) zajistí, že počet příjezdů do vrcholu bude stejný jako počet odjezdů z vrcholu. Skupina omezujících podmínek (2.4.4) zabrání vzniku nepřípustného podcyklu. Skupiny omezujících podmínek (2.4.5) a (2.4.6) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

2.5. Využití optimalizačních úloh při modelování systému volného carsharingu

Optimalizační přístup pro modelování vybraného problému technologie volného carsharingu bude založen na využití metod lineárního programování. Koncepce navrhovaného lineárního matematického modelu bude založena na propojení dvou typů optimalizačních úloh – dopravní úlohy (popřípadě přiřaďovacího problému) a úlohy obchodního cestujícího s více okružními jízdami – Vehicle Routing Problem (popřípadě Traveling Salesman Problem). Způsob, jakým budou jednotlivé typy optimalizačních úloh využity, bude popsán v kapitole věnované návrhu matematických modelů.

3. Návrh matematických modelů pro relokaci vozidel v systémech volného carsharingu

Jak již bylo psáno v podkapitole 1.2.2. o volném carsharingu, poskytuje tento typ sdílení vozidel uživatelům vyšší úroveň služeb než další typy sdílení, díky čemuž se stal velmi oblíbený a hojně využívaný v mnoha městech světa, ale i České republiky. Za připomenutí stojí zejména fakt, že hlavní výhodou volného carsharingu je možnost vrácení vozidla uživatelem v jiné destinaci, než ve které si vozidlo vyzvedl.

Tato uživatelská výhoda je však pro provozovatele naopak nevýhodou, která vede k logistickému problému přemístění vozidel z neatraktivních výstupních lokalit do lokalit, ve kterých je o sdílená vozidla velký zájem (železniční stanice, letiště, nákupní centra, apod.). Dnes a denně si uživatelé systému carsharing stěžují, že sdílené automobily nejsou k dispozici v jejich blízkém okolí, ale jsou rozmístěny v obtížně dostupných částech města.

Aby byl tento problém vyřešen, je provozovatel nucen tato vozidla na své náklady vhodným způsobem přemísťovat. Řešení tohoto problému z oblasti volného carsharingu bývá označován jako relokace vozidel.

V České republice funguje volný carsharing v současné době jen na území hlavního města Prahy a města Brna a společnost provozující tento systém carsharingu problém s relokací vozidel řeší, avšak se nepodařilo zjistit jakým způsobem. Zda exaktním způsobem (za pomocí optimalizačních úloh, díky kterým je přemisťování vozidel z méně atraktivních lokalit do atraktivnějších lokalit nejefektivnější z finančního a časového hlediska) anebo jiným způsobem, kde například přemisťování vozidel probíhá náhodně.

3.1. Popis procesu relokace vozidel a možnosti jeho řešení

Proces relokace vozidel může být popsán jako třífázový proces.

První fáze procesu relokace spočívá v rozvozu řidičů z centrály provozovatele do míst, ve kterých jsou odstavena sdílená vozidla. Druhá fáze procesu relokace spočívá v neproduktivních přejezdech vozidel z míst jejich odstavení do cílových míst, ve kterých je požadováno jejich přistavení (zpravidla v atraktivních lokalitách). Třetí fázi lze charakterizovat jako zpětný svoz řidičů z cílových míst do centrály provozovatele.

Pro řešení první a třetí fáze procesu relokace lze použít optimalizační úlohy Vehicle Routing Problem anebo Traveling Salesman Problem, pro řešení druhé fáze procesu relokace vozidel lze použít optimalizační úlohy dopravní úloha anebo speciální případ dopravní úlohy – přiřaďovací problém.

U všech variant modelů obsahujících druhou fázi procesu relokace se předpokládá, že existuje více než 1 místo odstavení vozidel a více než jedno místi přistavení vozidel.

Navržené modely mohou být aplikovány na případy, ve kterých jsou vozidla odstavena např. ve večerních hodinách a jejich přistavení je požadováno např. v ranních hodinách následujícího dne.

3.2. Popis variant procesu relokace vozidel

Na základě rozdělení procesu relokace vozidel na uvedené tři fáze se může v praxi vyskytnout několik variant procesu relokace, přičemž pro každý případ bude v dalším textu diplomové práce uvedena samostatná varianta matematického modelu.

V první variantě procesu relokace vozidel se řidiči carsharingových vozidel sami dostaví do míst odstavení vozidel a přejedou s vozidly do míst přistavení. V této chvíli jejich pracovní povinnosti pro carsharingovou společnost končí. V první variantě relokace vozidel se řeší pouze druhá fáze procesu relokace. Tato varianta nastává např., pokud se jedná o najaté řidiče jen na zajištění neproduktivních přejezdů (nejedná se o kmenové zaměstnance carsharingové společnosti, ale o brigádníky), kteří mají za úkol se sami dostavit do míst odstavení vozidel v neatraktivních lokalitách a po přemístění vozidel do míst přistavení jejich práce skončí.

Ve druhé variantě procesu relokace vozidel se řidiči carsharingových vozidel dostaví do centrály provozovatele, ze které jsou rozváženi do míst odstavení vozidel. Rozvezení řidiči z těchto míst odstavení přejedou s vozidly do míst přistavení vozidel a zde jejich pracovní povinnosti pro carsharingovou společnost končí. Ve druhé variantě procesu relokace vozidel se řeší první a druhá fáze procesu relokace. Tento postup se může například využít, pokud se jedná o řidiče najaté na neproduktivní přejezdy, které chce mít provozovatel společnosti z různých důvodů (například předání informací o relokaci nebo podpis smlouvy) ještě před výjezdem do terénu ve svém zázemí, anebo se může jednat o kmenové zaměstnance, kterým po relokaci vozidel do cílových míst končí pracovní den a sami se dále přemísťují do míst svých bydlišť apod.

Ve třetí variantě procesu relokace vozidel jsou řidiči carsharingových vozidel rozváženi z centrály provozovatele do míst odstavení vozidel, rozvezení řidiči z těchto míst přejedou s vozidly do míst přistavení vozidel, ze kterých jsou znova sváženi zpět do centrály provozovatele. Při této třetí variantě relokace vozidel se řeší všechny tři fáze procesu relokace. Tento postup se může například využít, pokud se jedná o kmenové zaměstnance carsharingové společnosti a relokace vozidel není jejich jediná povinnost v rámci společnosti.

3.2.1. Matematické modely pro první variantu problému relokace vozidel

V případě první varianty se jedná o nejjednodušší variantu relokace vozidel spočívající pouze v optimalizaci neproduktivních přejezdů vozidel z míst jejich odstavení do míst, ve kterých je požadováno jejich přistavení. Pro tento případ postačí aplikovat pouze některý z modelů dopravní úlohy nebo přiřaďovacího problému, viz modely uvedené v podkapitolách 2.1. a 2.2. (dopravní úloha a přiřaďovací problém).

V situaci, kdy se v každém místě s odstaveným vozidlem nachází právě jedno vozidlo a současně je v každém místě přistavení požadováno právě jedno vozidlo, bude použit model přiřaďovacího problému, ve všech ostatních případech bude použit model dopravní úlohy.

3.2.1.1. Matematické modely pro první variantu problému relokace vozidel využívající přiřaďovací problém

V této podkapitole budou uvedeny modely pro případy, ve kterých se v každém místě odstavení nachází právě jedno vozidlo a současně je v každém místě přistavení požadováno právě jedno vozidlo

Množiny vystupující ve variantě modelu:

- N_1 – množina vrcholů reprezentujících místa odstavení vozidel,
- N_2 – množina vrcholů reprezentujících místa přistavení vozidel.

Konstanta vystupující ve variantě modelu bude mít následující význam:

- d_{ij} – celková vzdálenost v kilometrech při neproduktivním přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$.

Proměnná z_{ij} vystupující v přiřaďovacím problému bude modelovat rozhodnutí o přejezdu vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$. Bude se jednat o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, proto se volí definiční obor $\{0;1\}$. V rámci řešené varianty bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $z_{ij} = 1$, potom se přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$ uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $z_{ij} = 0$, potom se přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$ neuskuteční.

V prvním modelu bude dále platit, že $|N_1| = |N_2|$. Počet odstavených vozidel je tedy stejný jako počet míst, ve kterých je přistavení vozidel požadováno. Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \qquad (3.2.1.1.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (3.2.1.1.2)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (3.2.1.1.3)$$

$$z_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (3.2.1.1.4)$$

Funkce (3.2.1.1.1) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel pouze v rámci druhé fáze procesu relokace. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.1.2) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.1.3) zajistí, že do každého místa, ve kterém je vozidlo požadováno, bude přistaveno právě jedno vozidlo. Skupina obligatorních omezujících podmínek (3.2.1.1.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

Ve druhém modelu bude platit, že $|N_1| > |N_2|$. Počet odstavených vozidel je tedy vyšší než počet míst, ve kterých je přistavení vozidel požadováno. Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \qquad (3.2.1.1.5)$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} \leq 1 \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (3.2.1.1.6)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (3.2.1.1.7)$$

$$z_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (3.2.1.1.8)$$

Funkce (3.2.1.1.5) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel pouze v rámci druhé fáze procesu relokace. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.1.6) zabezpečuje, že z každého místa odstavení bude nařízen přejezd maximálně jednomu vozidlu. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.1.7) zajistí, že do každého místa, ve kterém je vozidlo požadováno, bude přistaveno právě jedno vozidlo. Skupina obligatorních omezujících podmínek (3.2.1.1.8) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

Ve třetím modelu bude platit, že $|N_1| < |N_2|$. Počet odstavených vozidel je tedy nižší než počet míst, ve kterých je přistavení vozidel požadováno. Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \tag{3.2.1.1.9}$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in N_1 \tag{3.2.1.1.10}$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} \leq 1 \qquad pro\ j \in N_2 \tag{3.2.1.1.11}$$

$$z_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \tag{3.2.1.1.12}$$

Funkce (3.2.1.1.9) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel pouze v rámci druhé fáze procesu relokace. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.1.10) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.1.11) zajistí, že na každé místo bude přistaveno maximálně jedno vozidlo. Skupina obligatorních omezujících podmínek (3.2.1.1.12) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

3.2.1.2 Matematické modely pro první variantu problému relokace vozidel využívající dopravní úlohu

V této podkapitole budou uvedeny modely pro případy, pro které se nevztahují modely přiřaďovacího problému. Jde o následující případy:

- minimálně v jednom místě jsou odstavena alespoň dvě vozidla,
- minimálně v jednom místě je požadováno přistavení alespoň dvou vozidel,
- minimálně v jednom místě jsou odstavena alespoň dvě vozidla a současně minimálně v jednom místě je požadováno přistavení alespoň dvou vozidel.

Množiny vystupující ve variantě modelu:

- N_1 – množina vrcholů reprezentujících místa odstavení vozidel,
- N_2 – množina vrcholů reprezentujících místa přistavení vozidel.

Konstanty vystupující ve variantě modelu budou mít následující významy:

- d_{ij} – celková vzdálenost v kilometrech při neproduktivním přejezdu jednoho vozidla z místa odstavení $i \in N_1$ do místa přistavení $j \in N_2$,
- m_i – počet vozidel odstavených v místě $i \in N_1$,
- n_j – počet vozidel požadovaných k přistavení v místě $j \in N_2$.

Proměnná z_{ij} vystupující v dopravní úloze bude modelovat rozhodnutí o počtech přejíždějících vozidel z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$. Bude se tedy jednat o proměnnou s definičním oborem R_0^+.

V prvním modelu bude dále platit, že:

$$\sum_{i \in N_1} m_i = \sum_{j \in N_2} n_j$$

Počet vozidel nacházejících se v místech odstavení je tedy stejný jako počet vozidel, která jsou požadována k přistavení.

Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \qquad (3.2.1.2.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = m_i \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (3.2.1.2.2)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = n_j \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (3.2.1.2.3)$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (3.2.1.2.4)$$

Funkce (3.2.1.2.1) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel pouze v rámci druhé fáze procesu relokace. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.2.2) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.2.3) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěn požadovaný počet vozidel. Skupina obligatorních omezujících podmínek (3.2.1.2.4) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

Ve druhém modelu bude dále platit, že:

$$\sum_{i \in N_1} m_i > \sum_{j \in N_2} n_j$$

Počet vozidel nacházejících se v místech odstavení je tedy vyšší než počet vozidel požadovaných k přistavení. Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \qquad (3.2.1.2.5)$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} \leq m_i \qquad pro\; i \in N_1 \qquad (3.2.1.2.6)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = n_j \qquad pro\; j \in N_2 \qquad (3.2.1.2.7)$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\; i \in N_1, j \in N_2 \qquad (3.2.1.2.8)$$

Funkce (3.2.1.2.5) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel pouze v rámci druhé fáze procesu relokace. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.2.6) zabezpečuje, že z každého místa odstavení nebude nařízen přejezd více vozidlům, než jsou v daném místě k dispozici. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.2.7) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěn požadovaný počet vozidel. Skupina obligatorních omezujících podmínek (3.2.1.2.8) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

Ve třetím modelu bude platit, že:

$$\sum_{i \in N_1} m_i < \sum_{j \in N_2} n_j$$

Počet vozidel v místech odstavení je tedy nižší než počet vozidel požadovaných k přistavení. Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \qquad (3.2.1.2.9)$$

za podmínek:

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = m_i \qquad pro\; i \in N_1 \qquad (3.2.1.2.10)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} \leq n_j \qquad pro\; j \in N_2 \qquad (3.2.1.2.11)$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\; i \in N_1, j \in N_2 \qquad (3.2.1.2.12)$$

Funkce (3.2.1.2.9) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel pouze v rámci druhé fáze procesu relokace. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.2.10) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (3.2.1.2.11) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěno maximálně tolik vozidel, kolik je požadováno. Skupina obligatorních omezujících podmínek (3.2.1.2.12) vymezuje definiční obory proměnných použitých v modelu.

3.2.2. Matematický model pro druhou variantu problému relokace vozidel

Je komplikovanější variantou problému relokace vozidel, protože v sobě zahrnuje dvě fáze – první fázi spočívající v rozvozu řidičů a druhou fázi spočívající v neproduktivních přejezdech vozidel. Matematický model dopravní úlohy nebo přiřaďovacího problému je tedy nutno doplnit o podmínky zajišťující rozvoz řidičů z centrály provozovatele do míst, ve kterých jsou odstavena vozidla.

Jak již bylo zmíněno, tak první fáze se řeší jako optimalizační úloha Vehicle Routing Problem anebo Traveling Salesman Problem. Úloha VRP se použije v případě, pokud bude zapotřebí rozvést více řidičů, než je kapacita vozidla K vyjádřená v počtu míst ve vozidle sníženém o místo řidiče. Naopak, je-li zapotřebí rozvést více řidičů, než je kapacita vozidla K vyjádřená v počtu míst ve vozidle sníženém o místo řidiče, pak se bude jednat o úlohu TSP.

Ve druhé fázi se mohou vyskytnout případy, které se řeší za pomocí šesti typů úloh – vybilancovanou dopravní úlohou, nevybilancovanou dopravní úlohou s přebytkem kapacit zdrojů, nevybilancovanou dopravní úlohou s nedostatkem kapacit zdrojů, vybilancovaným přiřaďovacím problémem, nevybilancovaným přiřaďovacím problémem s přebytkem kapacit zdrojů a nevybilancovaným přiřaďovacím problémem s nedostatkem kapacit zdrojů. Jejich použití je popsáno v kapitole 3.2.1. V této části práce je popsán jen matematický model kombinující model VRP s modelem vybilancovaného přiřaďovacího problému v druhé fázi. Modely pro ostatní kombinace jsou v přílohách A – E.

Množiny vystupující ve variantě modelu:

- N_0 – množina všech vrcholů včetně centrály provozovatele,
- N_1 – množina vrcholů reprezentující místa odstavení vozidel (místa, do kterých je nutno řidiče z centrály provozovatele rozvézt),
- N_2 – množina vrcholů reprezentujících místa přistavení vozidel,
- V – množina vozidel.

Konstanty vystupující ve variantě modelu budou mít následující významy:

- c_{ij} – celková vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze rozvozu řidičů,
- d_{ij} – celková vzdálenost v kilometrech při neproduktivním přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$.

Proměnná z_{ij} bude modelovat rozhodnutí o přejezdu vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$. Bude se jednat o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, proto se volí definiční obor {0;1}. V rámci řešené varianty bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $z_{ij} = 1$, potom se přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$ uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $z_{ij} = 0$, potom se přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$ neuskuteční. Proměnná z_{ij} modeluje rozhodnutí v rámci neproduktivních přejezdů.

Proměnná x_{ijk} bude modelovat rozhodnutí o přejezdu vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$. Bude se jednat o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, proto se volí definiční obor {0;1}. V rámci řešené varianty bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $x_{ijk} = 1$, potom se přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $x_{ijk} = 0$, potom se přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ neuskuteční. Proměnná x_{ijk} modeluje rozhodnutí v rámci fáze rozvozu řidičů.

Poslední skupina proměnných je tvořena skupinou nezáporných proměnných y_{ik}, jejíchž jedinou funkcí je zabránit vzniku nepřípustného podcyklu.

Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x,y,z) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \tag{3.2.2.1}$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \tag{3.2.2.2}$$

$$\sum_{i \in N_o} x_{ijk} = \sum_{i \in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \tag{3.2.2.3}$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \le 1 \qquad pro\ k \in V \tag{3.2.2.4}$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \le 1 \qquad pro\ k \in V \tag{3.2.2.5}$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i, j \in N_1, k \in V \qquad (3.2.2.6)$$

$$\sum_{i \in N_0} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \qquad (3.2.2.7)$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (3.2.2.8)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (3.2.2.9)$$

$$x_{ijk} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (3.2.2.10)$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (3.2.2.11)$$

$$z_{ij} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (3.2.2.12)$$

Funkce (3.2.2.1) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci druhé varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení).

Skupiny omezujících podmínek (3.2.2.2) – (3.2.2.7) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (3.2.2.2) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (3.2.2.3) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (3.2.2.4) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (3.2.2.5) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (3.2.2.6) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (3.2.2.7) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (3.2.2.8) a (3.2.2.9) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (3.2.2.8) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (3.2.2.9) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěno právě jedno vozidlo. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (3.2.2.10), (3.2.2.11) a (3.2.2.12) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

3.2.3. Matematický model pro třetí variantu problému relokace vozidel

Je nejkomplikovanější variantou problému relokace vozidel, protože v sobě zahrnuje všechny tři fáze – první fázi spočívající v rozvozu řidičů, druhou fázi spočívající v neproduktivních přejezdech carsharingových vozidel a třetí fázi spočívající ve zpětném svozu řidičů. Matematický model dopravní úlohy nebo přiřaďovacího problému je tedy nutno doplnit o podmínky zajišťující rozvoz řidičů z centrály provozovatele do míst, ve kterých jsou odstavena vozidla a o podmínky zajišťující svoz řidičů z cílových míst odstavení vozidel zpět do centrály provozovatele.

Jestli se v první a třetí fázi jedná o úlohu VRP anebo TSP rozhodne stejně jako v podkapitole 3.2.2. množina obsluhovaných vrcholů N a kapacita vozidla K.

I zde ve třetí variantě problému relokace vozidel mohou v druhé fázi nastat případy, které se řeší za pomocí šesti typů optimalizačních úloh. Jejich použití je popsáno v podkapitole 3.2.1. V této části práce je popsán jen matematický model s využitím modelů VRP pro fázi rozvozu a zpětného svozu řidičů a vybilancovaného přiřaďovacího problému ve fázi přejezdů carsharingových vozidel. Modely pro ostatní kombinace jsou v přílohách F – J.

Množiny vystupující ve variantě modelu:

- N_0 – množina všech vrcholů včetně centrály provozovatele,
- N_1 – množina vrcholů reprezentující místa odstavení vozidel (místa, do kterých je nutno řidiče z centrály provozovatele rozvézt),
- N_2 – množina vrcholů reprezentujících místa přistavení vozidel (místa, ze kterých bude nutno provést svoz řidičů do centrály provozovatele),
- V – množina vozidel.

Konstanty vystupující ve variantě modelu budou mít následující významy:

- c_{ij} – celková vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze rozvozu řidičů,
- d_{ij} – celková vzdálenost v kilometrech při neproduktivním přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$,
- e_{ij} – celková vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze svozu řidičů.

Proměnná z_{ij} bude modelovat rozhodnutí o přejezdu carsharingového vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$. Bude se jednat o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, proto se volí definiční obor $\{0;1\}$. V rámci řešené varianty bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $z_{ij} = 1$, potom se přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$ uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $z_{ij} = 0$, potom se přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$ neuskuteční.

Proměnná x_{ijk} bude modelovat rozhodnutí o přejezdu vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$. Bude se jednat o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, proto se volí definiční obor $\{0;1\}$. V rámci řešené varianty bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $x_{ijk} = 1$, potom se přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $x_{ijk} = 0$, potom se přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ neuskuteční. Proměnná x_{ijk} modeluje rozhodnutí týkající se fáze rozvozu řidičů.

Proměnná u_{ijk} bude modelovat rozhodnutí o přejezdu vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$. Bude se jednat o proměnnou, která modeluje rozhodnutí typu ANO – NE, proto se volí definiční obor $\{0;1\}$. V rámci řešené varianty bude platit, že když po skončení optimalizačního výpočtu bude $u_{ijk} = 1$, potom se přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ uskuteční, když po skončení optimalizačního výpočtu bude platit, že $u_{ijk} = 0$, potom se přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ neuskuteční. Proměnná u_{ijk} modeluje rozhodnutí týkající se fáze svozu řidičů.

Poslední skupina proměnných je tvořena skupinou nezáporných proměnných y_{ik}, jejíchž jedinou funkcí je zabránit vzniku nepřípustného podcyklu.

Matematický model bude mít tvar:

$$min\, f(x,y,z) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} e_{ij} u_{ijk} \qquad (3.2.3.1)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \qquad (3.2.3.2)$$

$$\sum_{i \in N_o} x_{ijk} = \sum_{i \in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \qquad (3.2.3.3)$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (3.2.3.4)$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (3.2.3.5)$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \qquad (3.2.3.6)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \qquad (3.2.3.7)$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (3.2.3.8)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (3.2.3.9)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} u_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (3.2.3.10)$$

$$\sum_{i \in N_o} u_{ijk} = \sum_{i \in N_o} u_{jik} \qquad pro\ j \in N_2, k \in V \qquad (3.2.3.11)$$

$$\sum_{j \in N_2} u_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (3.2.3.12)$$

$$\sum_{i \in N_2} u_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (3.2.3.13)$$

$$v_{ik} - v_{jk} + n \cdot u_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \qquad (3.2.3.14)$$

$$\sum_{i \in N_O} \sum_{j \in N_2} u_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \qquad (3.2.3.15)$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (3.2.3.16)$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (3.2.2.17)$$

$$z_{ij} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (3.2.3.18)$$

$$u_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (3.2.3.19)$$

$$v_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (3.2.3.20)$$

Funkce (3.2.3.1) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci třetí varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení a o neproduktivní kilometry najeté v rámci svozu).

Skupiny omezujících podmínek (3.2.3.2) – (3.2.3.7) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.2) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (3.2.3.3) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.4) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (3.2.3.5) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.6) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.7) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (3.2.3.8) a (3.2.3.9) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.8) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.9) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěno právě jedno vozidlo. Skupiny omezujících podmínek (3.2.3.10) – (3.2.3.15) se vztahují k třetí fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.10) zajistí, že z každého místa přistavení vozidla bude odvezen právě jeden řidič. Skupina podmínek (3.2.3.11) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.12) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze svozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (3.2.3.13) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.14) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (3.2.3.15) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (3.2.3.16) až (3.2.3.20) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

4. Výpočetní experimenty s modely

Tato kapitola je do diplomové práce zařazena z důvodu, aby se na třech navržených variantách relokace vozidel z Kapitoly 3 ověřila správnost a funkčnost modelů. Dále bude v této kapitole jednoduché seznámení se softvérovým prostředím Xpress-IVE, ve kterém budou tyto výpočetní experimenty s modely provedeny a také s programovacím jazykem Mosel, který je prostředkem tohoto optimalizačního prostředí. Toto seznámení bude demonstrováno při transformaci prvního matematického modelu do textu programu. V dalších prezentovaných matematických modelech budou uváděny výlučně texty programů bez komentáře.

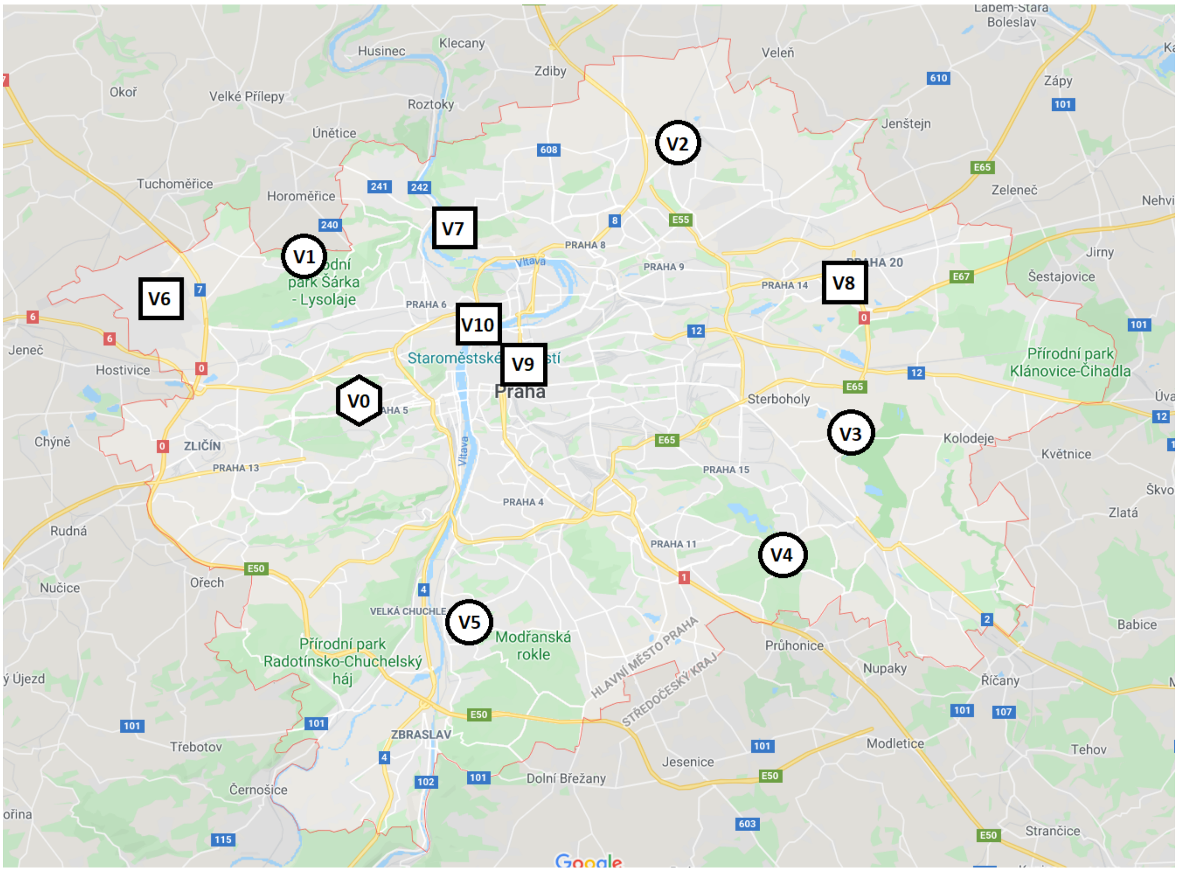
V této kapitole budou prezentovány výsledky čtyř výpočetních experimentů:

- první varianta řešení relokace vozidel,
- druhá varianta řešení relokace vozidel,
- třetí varianta řešení relokace vozidel,
- dekomponovaný model třetí varianty řešení relokace vozidel na tři části.

Ve výpočetních experimentech se budou nacházet varianty řešení relokace vozidel, ve kterých bude jen matematický model s využitím modelů VRP (pro fázi rozvozu a zpětného svozu řidičů) a vybilancovaného přiřaďovacího problému (pro fázi přejezdů carsharingových vozidel).

4.1. Seznámení s modelovým příkladem

Výpočetní experimenty budou prováděny na jednoduchém modelovém příkladu reálné dopravní sítě, konkrétně na území hlavního města Prahy, ve kterém se nachází nejvíce uživatelů služeb carsharingu, nejvíce provozovatelů carsharingu, ale také tam již volný carsharing funguje. Dopravní síť je zachycena na obrázku 8. V této dopravní síti bylo náhodně vybráno místo centrály provozovatele $V0$ (na obrázku 8 značená šestiúhelníkem), místa odstavení vozidel v neatraktivních lokalitách $V1, \dots, V5$ (na obrázku 8 značené kolečkem) a místa přistavení v uživatelsky atraktivních lokalitách $V6, \dots, V10$ (na obrázku 8 značené čtverečkem).



Obrázek 8: Mapa dopravní sítě bez viditelných hran [autor], [26]

Informace o všech vrcholech v konkrétní dopravní síti jsou zobrazeny v následující tabulce 3.

Tabulka 3: Informace o všech vrcholech v dopravní síti

Značení	Význam	Umístění	Adresa
V0	centrála provozovatele	průmyslový areál	Pod Kotlářkou 151/3
V1	místo odstavení	rodinné domy	U Házů
V2	místo odstavení	rodinné domy	Trutnovská
V3	místo odstavení	rodinné domy	U Pavilónu
V4	místo odstavení	rodinné domy	Anýzová
V5	místo odstavení	rodinné domy	Nečova
V6	místo přistavení	Letiště Václava Havla	Aviatická
V7	místo přistavení	ZOO Praha	U Trojského zámku 3/120
V8	místo přistavení	Nákupní centrum Černý Most	Chlumecká 765/6
V9	místo přistavení	Praha hlavní nádraží	Wilsonova 300/8
V10	místo přistavení	Staroměstské náměstí	Pařížská

V tabulce 4 se nacházejí informace o hodnotách vzdáleností v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla mezi konkrétními vrcholy dopravní sítě. Hodnoty byly měřeny pomocí [26]. Byly vybírány nejkratší trasy, které byly ve většině případů i ty nejrychlejší. Jelikož se jedná o místa v městské aglomeraci, tak se předpokládá, že jsou všechna propojeny komunikacemi (graf reprezentující dopravní síť je tedy souvislý).

Tabulka 4: Vzdálenosti v kilometrech mezi konkrétními vrcholy dopravní sítě [autor], [26]

	V0	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10
V0	0	9,4	17,8	23,6	20,3	12,1	10,5	13	22,4	8,5	6,4
V1	9,4	0	17,3	24,8	25,3	17,5	7	12,5	23,9	10,9	9,3
V2	17,8	17,3	0	15	18,2	22	23,3	9,7	10,3	10,5	11,2
V3	23,6	24,8	15	0	7,4	20,3	38	17,4	7,7	12,9	16,3
V4	20,3	25,3	18,2	7,4	0	13,6	33,3	20,6	14,4	15,3	16,8
V5	12,1	17,5	22	20,3	13,6	0	24,6	19,5	23,9	16,3	11,3
V6	10,5	7	23,3	38	33,3	24,6	0	19,2	31,9	17,6	16
V7	13	12,5	9,7	17,4	20,6	19,5	19,2	0	15,9	6,5	6,8
V8	22,4	23,9	10,3	7,7	14,4	23,9	31,9	15,9	0	12,4	13,9
V9	8,5	10,9	10,5	12,9	15,3	16,3	17,6	6,5	12,4	0	4,3
V10	6,4	9,3	11,2	16,3	16,8	11,3	16	6,8	13,9	4,3	0

Jak je zřejmé z tabulky, tak tabulka je souměrná podle hlavní diagonály, z čehož vyplývá, že vzdálenosti v obou směrech jsou shodné.

Rozvoz a svoz řidičů bude probíhat osobními automobily s kapacitou $K = 4$ (vyjádřenou v počtu míst ve vozidle sníženém o místo řidiče), přičemž bude obsluhováno pět míst odstavení a pět míst přistavení. Z toho vyplývá, že k rozvozu a svozu řidičů budou zapotřebí dvě vozidla, tedy, že pro množinu vozidel V platí $|V| = 2$ (tato informace je nutná pouze pro druhou a třetí variantu řešení relokace vozidel).

4.2. Výpočetní experiment s první variantou řešení relokace vozidel

Výpočetní experiment s první variantou řešení relokace vozidel, to znamená pouze řešení neproduktivních přejezdů vozidel z míst odstavení v neatraktivních lokalitách do míst přistavení, bude prováděn na modelovém příkladu z předchozí podkapitoly, ve kterém nebude uvažováno s vrcholem $V0$ reprezentujícím centrálu provozovatele.

V tabulce 5 je znázorněna matice d_{ij} zobrazující celkovou vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z místa odstavení $i \in N_1$ do místa přistavení $j \in N_2$ při neproduktivních přejezdech.

Tabulka 5: Celková vzdálenost v kilometrech při neproduktivním přejezdu vozidla mezi vrcholy [autor], [26]

		Místa přistavení				
		V6	V7	V8	V9	V10
Místa odstavení	V1	7	12,5	23,9	10,9	9,3
	V2	23,3	9,7	10,3	10,5	11,2
	V3	38	17,4	7,7	12,9	16,3
	V4	33,3	20,6	14,4	15,3	16,8
	V5	24,6	19,5	23,9	16,3	11,3

Úkolem je minimalizovat hodnotu účelové funkce, která reprezentuje celkovou ujetou vzdálenost.

Začínajícím příkazem při transformaci první varianty modelu pro řešení relokace vozidel do programovacího jazyka MOSEL, se kterým software Xpress-IVE pracuje, je v záhlaví programu slovo *„model“*, za které se dosadí jednoslovný název (v případě potřeby je možno vytvořit víceslovný název, přičemž mezi slovy jsou vhodně umístěná podtržítka). V tomto konkrétním případě vypadá příkaz následovně:

model prvni_varianta

Druhý a poslední řádek tvořící záhlaví obsahuje příkaz *„uses "mmxprs"“*, který inicializuje modul, ve kterém se nacházejí optimalizační metody.

Druhá část zahájená klíčovým slovem *„declarations“* je tzv. deklarační část, ve které se uvádí a definují veškeré konstanty typu pole a proměnné, včetně jejich rozsahů. V tomto případě je v deklarační části výraz *„N1=1..5“*, což reprezentuje množinu pěti odstavných míst, dále výraz *„N2=1..5“*, což reprezentuje množinu pěti míst přistavení. Následně je definován symbol d, který má reprezentovat vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z místa odstavení $i \in N_1$ do místa přistavení $j \in N_2$ při neproduktivních přejezdech, za pomocí zápisu *„d:array(N1,N2)of real“*. Slova *„array“* a *„of real“* v tomto zápise určí, že se jedná o reálnou konstantu typu pole. V posledním řádku deklarační části se nachází zápis *„z:array(N1,N2)of mpvar“*, který obdobně jako v předchozím případě definoval typ pole, avšak zde zápis *„of mpvar“* určí, že se jedná o proměnnou. Ukončení deklarační částí se provádí klíčovým slovem *„end-declarations“*. Celá deklarační část první varianty řešení relokace vozidel má tvar:

N1=1..5

N2=1..5

d:array(N1,N2)of real

z:array(N1,N2)of mpvar

Do třetí části textu programu jsou zadávána vstupní data, tedy konkrétní hodnoty jednotlivých veličin. V tomto případě se jedná jen o matici vzdáleností přejezdů mezi vrcholy $i \in N_1$ a $j \in N_2$:

d::[7,12.5,23.9,10.9,9.3,

23.3,9.7,10.3,10.5,11.2,

38,17.4,7.7,12.9,16.3,

33.3,20.6,14.4,15.3,16.8,

24.6,19.5,23.9,16.3,11.3]

Desetinné hodnoty je nutno oddělit tečkou.

V následující části programu jsou vypsány omezující podmínky. První skupina omezujících obligatorních podmínek má v zápisu tvar: *„forall(i in N1,j in N2)z(i,j)is_binary“* a slovo *„forall“* se použije v případě, je-li potřeba tuto operaci provádět několikrát, což je v tomto případě žádoucí. Slova *„is binary“* zajistí, že se bude jednat o bivalentní proměnnou. Na dalších dvou řádcích jsou zápisy *„forall(i in N1)sum(j in N2)z(i,j)=1“* a *„forall(j in N2)sum(i in N1)z(i,j)=1“*, které reprezentují skupiny podmínek zajišťující, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd a že na každé místo přistavení bude umístěno právě jedno vozidlo. Celá část s podmínkami má tvar:

forall(i in N1,j in N2)z(i,j)is_binary

forall(i in N1)sum(j in N2)z(i,j)=1

forall(j in N2)sum(i in N1)z(i,j)=1

V další části textu programu se zapisuje účelová funkce a požadovaný typ extrému. Pokud se jedná o maximalizaci, potom se zadá příkaz *„maximize“*, pokud o minimalizaci, zadá se příkaz *„minimize“*. Pro první variantu řešení relokace vozidel jsou účelová funkce a typ extrému v jazyce MOSEL zapsány následovně:

*uf:=sum(i in N1,j in N2)d(i,j)*z(i,j)*

minimize(uf)

Poslední částí je určení textového výstupu. Příkaz *„writeln“* zajišťuje zobrazení textového řetězce, příkaz *„getobjval“* se použije, pokud je potřeba zobrazit např. vypočtenou hodnotu účelové funkce a příkaz *„getsol“* při zobrazené hodnot proměnných. Pro získání výstupu na obrazovku při první variantě řešení relokace vozidel se použijí následující příkazy:

writeln("uf= ",getobjval)

forall(i in N1,j in N2|getsol(z(i,j))=1)writeln("z(",i,",",j,")=",getsol(z(i,j)))

writeln

Posledním nutným příkazem při transformaci je příkaz *„end-model“*, zajišťující ukončení modelu.

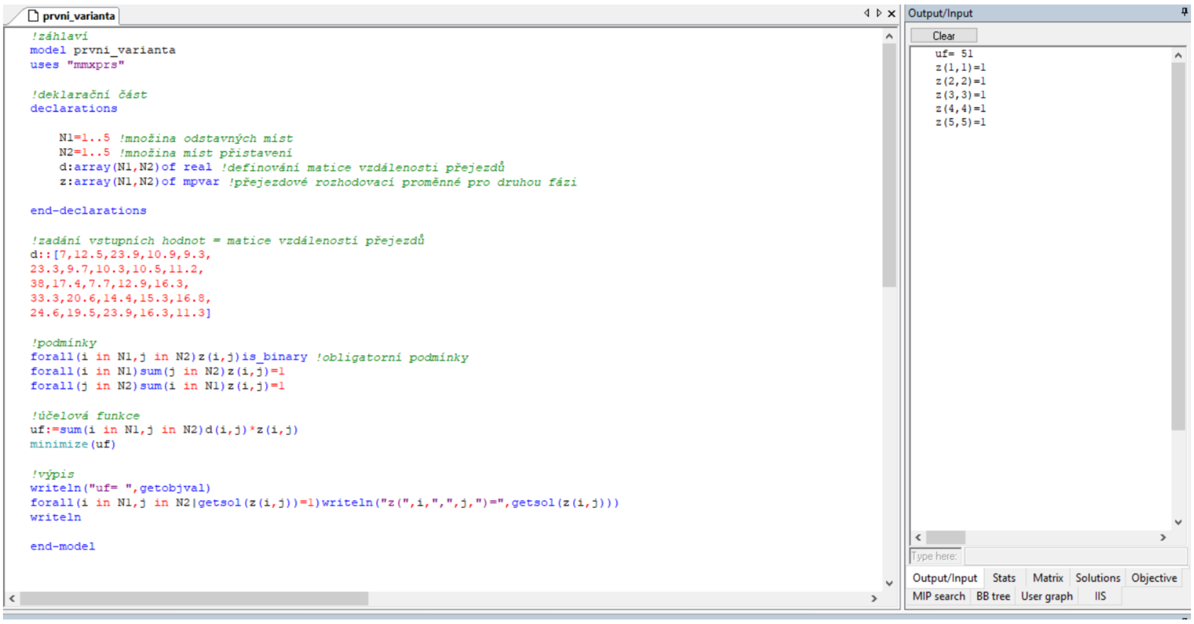
Kompletní text programu pro řešení první varianty relokace vozidel má tvar:

```
model prvni_varianta
uses "mmxprs"
declarations
    N1=1..5
    N2=1..5
    d:array(N1,N2)of real
    z:array(N1,N2)of mpvar
end-declarations
d::[7,12.5,23.9,10.9,9.3,
23.3,9.7,10.3,10.5,11.2,
38,17.4,7.7,12.9,16.3,
33.3,20.6,14.4,15.3,16.8,
24.6,19.5,23.9,16.3,11.3]
forall(i in N1,j in N2)z(i,j)is_binary
forall(i in N1)sum(j in N2)z(i,j)=1
forall(j in N2)sum(i in N1)z(i,j)=1
uf:=sum(i in N1,j in N2)d(i,j)*z(i,j)
minimize(uf)
writeln("uf= ",getobjval)
forall(i in N1,j in N2|getsol(z(i,j))=1)writeln("z(",i,",",j,")=",getsol(z(i,j)))
writeln
end-model
```

Naprogramovaný výstup vypadá následovně:

```
uf= 51
z(1,1)=1
z(2,2)=1
z(3,3)=1
z(4,4)=1
z(5,5)=1
```

Pro lepší ilustraci je na následujícím obrázku zobrazen celý zdrojový kód v programu, výstupní hodnoty řešení a komentáře.

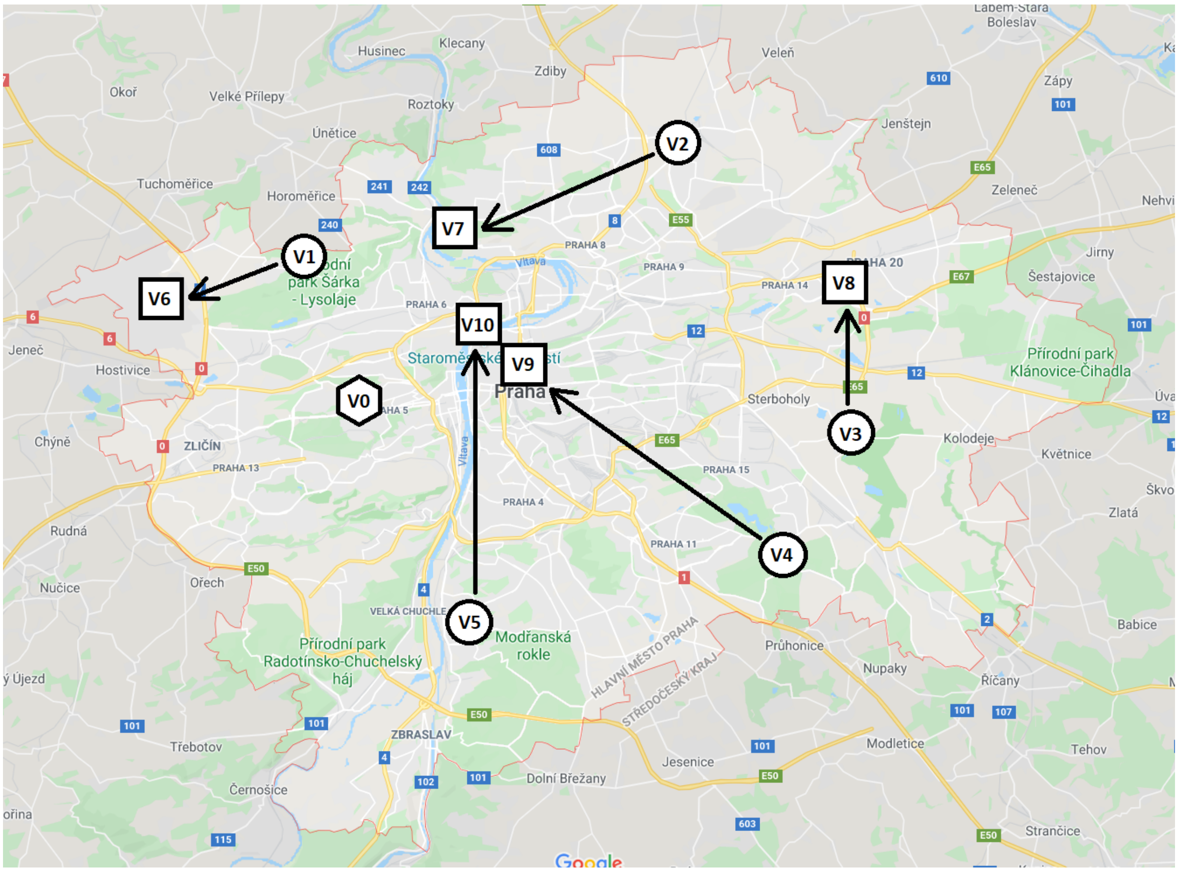


Obrázek 9: Zobrazení zdrojového kódu a výstupních hodnot v programu

Z výstupních hodnot je zřejmé, že hodnota účelové funkce je 51, z čehož vyplývá, že minimální celková ujetá vzdálenost při přejezdech vozidel z míst odstavení v neatraktivních lokalitách do míst přistavení v atraktivních lokalitách je 51 kilometrů.

Dále lze z následujících pěti hodnot z_{ij}, které vyjadřují přejezd vozidla z vrcholu $i \in N_1$ do vrcholu $j \in N_2$ určit, z jakých míst odstavení byla vozidla převezena do míst přistavení. Např. hodnota proměnné $z(1,1) = 1$ reprezentuje přejezd vozidla z $V1$ do vrcholu $V6$. Takto lze analogicky určit i zbývající přejezdy vozidel.

Aby bylo docíleno minimální celkové ujeté vzdálenosti 51 kilometrů při převozech vozidel z míst odstavení do míst přistavení, je nutno přesouvat vozidla mezi vrcholy tak, jak je zobrazeno na následujícím obrázku.



Obrázek 10: Grafické zobrazení optimálního řešení první varianty relokace vozidel [autor], [26]

4.3. Výpočetní experiment s druhou variantou řešení relokace vozidel

Výpočetní experiment s druhou variantou řešení relokace vozidel, to znamená rozvoz řidičů do míst odstavení vozidel a následné rozvezení vozidel z míst odstavení v neatraktivních lokalitách do míst přistavení, je prováděn na stejném modelovém příkladu dopravní sítě. V tomto druhém výpočetním experimentu se již bude vyskytovat vrchol $V0$ znázorňující centrálu provozovatele.

Potřebné hodnoty matice d_{ij} zobrazující celkovou vzdálenost v kilometrech při přejezdu jednoho vozidla z místa odstavení $i \in N_1$ do místa přistavení $j \in N_2$ jsou již zobrazeny v tabulce 5 v předchozí podkapitole. V následující tabulce 6 je znázorněna matice c_{ij} zobrazující celkovou vzdálenost v kilometrech při přejezdu rozvozního vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze rozvozu řidičů.

Tabulka 6: Celková vzdálenost v kilometrech při přejezdu vozidla mezi vrcholy v rámci fáze rozvozu řidičů [autor], [26]

	V0	V1	V2	V3	V4	V5
V0	0	9,4	17,8	23,6	20,3	12,1
V1	9,4	0	17,3	24,8	25,3	17,5
V2	17,8	17,3	0	15	18,2	22
V3	23,6	24,8	15	0	7,4	20,3
V4	20,3	25,3	18,2	7,4	0	13,6
V5	12,1	17,5	22	20,3	13,6	0

Kompletní text programu pro řešení druhé varianty relokace vozidel má tvar:

```
model druha_varianta
uses "mmxprs"
declarations
N0=0..5
N1=1..5
N2=1..5
V=1..2
c:array(N0,N0)of real
d:array(N1,N2)of real
x:array(N0,N0,V)of mpvar
z:array(N1,N2)of mpvar
y:array(N1,V)of mpvar
end-declarations
n:=5
M:=9999
K:=4
c::[M,9.4,17.8,23.6,20.3,12.1,
9.4,M,17.3,24.8,25.3,17.5,
17.8,17.3,M,15,18.2,22,
23.6,24.8,15,M,7.4,20.3,
20.3,25.3,18.2,7.4,M,13.6,
12.5,17.5,22,20.3,13.6,M]
d::[7,12.5,23.9,10.9,9.3,
23.3,9.7,10.3,10.5,11.2,
38,17.4,7.7,12.9,16.3,
33.3,20.6,14.4,15.3,16.8,
24.6,19.5,23.9,16.3,11.3]
forall(i in N0,j in N0,k in V)x(i,j,k)is_binary !obligatorní podmínky
forall(j in N1)sum(i in N0,k in V)x(i,j,k)=1
forall(j in N1,k in V)sum(i in N0)x(i,j,k)=sum(i in N0)x(j,i,k)
```

```
forall(k in V)sum(j in N1)x(0,j,k)<=1
forall(k in V)sum(i in N1)x(i,0,k)<=1
forall(k in V)sum(i in N0,j in N1)x(i,j,k)<=K
forall(i in N1,j in N1,k in V)y(i,k)-y(j,k)+n*x(i,j,k)<=n-1
forall(i in N1,j in N2)z(i,j)is_binary
forall(i in N1)sum(j in N2)z(i,j)=1
forall(j in N2)sum(i in N1)z(i,j)=1
uf:=sum(i in N0,j in N0,k in V)c(i,j)*x(i,j,k)+sum(i in N1,j in
N2)d(i,j)*z(i,j)
minimize(uf)
writeln("uf= ",getobjval)
forall(i in N0,j in N0,k in V|getsol(x(i,j,k))=1)writeln("x(",i,",",j,",",k,")
=",getsol(x(i,j,k)))
writeln
forall(i in N1,j in N2|getsol(z(i,j))=1)writeln("z(",i,",",j,")=",getsol(z(i,j)))
writeln
end-model
```

Naprogramovaný výstup vypadá následovně:

```
uf= 135.7
x(0,1,2)=1        z(1,1)=1
x(0,5,1)=1        z(2,2)=1
x(1,0,2)=1        z(3,3)=1
x(2,0,1)=1        z(4,4)=1
x(3,2,1)=1        z(5,5)=1
x(4,3,1)=1
x(5,4,1)=1
```

Z výstupních hodnot je zřejmé, že hodnota účelové funkce je 135,7. Z toho vyplývá, že hodnota minimální celkové ujeté vzdálenosti při rozvážení řidičů z centrály provozovatele do míst odstavení vozidel a při následných převozech těchto vozidel do míst přistavení činila 135,7 kilometrů.

Dále lze z následujících sedmi hodnot x_{ijk}, které vyjadřují přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ určit, v jakém pořadí navštěvovala vozidla vrcholy reprezentující místa odstavení. Např. hodnota proměnné $x(0,1,2) = 1$ reprezentuje přejezd druhého vozidla z centrály provozovatele $V0$ do vrcholu $V1$ a hodnota proměnné $x(1,0,2) = 1$ reprezentuje následující přejezd stejného vozidla z vrcholu $V1$ zpět do centrály provozovatele $V0$. Z toho plyne, že druhé vozidlo pouze zavezlo rozvážejícího řidiče do vrcholu 1 a vrátilo se zpět do centrály. Takto lze analogicky určit i pořadí rozvozu řidičů prvním vozidlem do míst odstavení vozidel. Z výstupních hodnot programu je patrné, že:

- první rozvozní vozidlo bude mít naplánovánu následující jízdu:

$$V0 \rightarrow V5 \rightarrow V4 \rightarrow V3 \rightarrow V2 \rightarrow V0$$

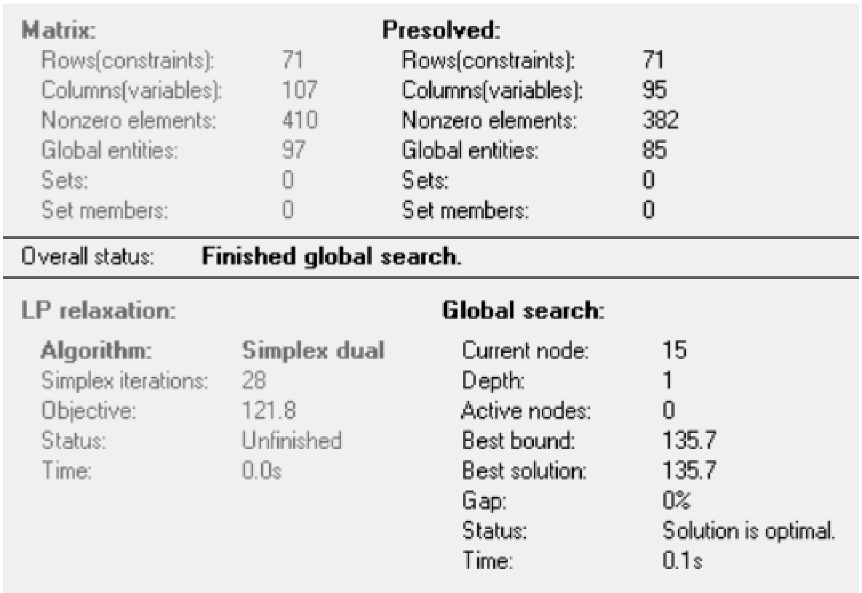
- druhé svozní vozidlo bude mít naplánovánu následující jízdu:

$$V0 \rightarrow V1 \rightarrow V0$$

- neproduktivní přejezdy vozidel z míst odstavení do cílových míst zůstaly stejné jako v první variantě řešení relokace vozidel.

Jak je zřejmé z předchozího textu, tak první rozvozní vozidlo přepraví čtyři řidiče z centrály provozovatele postupně do vrcholů $V5, V4, V3, V2$ a vrátí se zpět do centrály. Druhé rozvozní vozidlo přepraví zbylého řidiče do vrcholu $V1$ a vrátí se zpět do centrály provozovatele.

Na obrázku 11 je zobrazeno stavové hlášení o průběhu optimalizačního výpočtu druhé varianty řešení relokace vozidel v softwaru Xpress-IVE.



Obrázek 11: Hlášení o průběhu optimalizačního výpočtu druhé varianty v softwaru Xpress-IVE

4.4. Výpočetní experiment s třetí variantou řešení relokace vozidel

Výpočetní experiment s třetí variantou řešení relokace vozidel, která zahrnuje rozvoz řidičů do míst odstavení vozidel, přepravu vozidel z míst odstavení do míst přistavení a zpětný svoz řidičů z míst přistavení je prováděn na stejném modelovém příkladu dopravní sítě jako v předchozích dvou variantách.

Potřebné hodnoty matice d_{ij} zobrazující vzdálenosti v kilometrech absolvované při přejezdu jednoho vozidla z místa odstavení $i \in N_1$ do místa přistavení $j \in N_2$ byly zobrazeny v tabulce 5 v podkapitole 4.2, hodnoty matice c_{ij} zobrazující vzdálenosti v kilometrech při přejezdu rozvozního vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze rozvozu řidičů byly zobrazeny v tabulce 6 v předchozí podkapitole. V následující tabulce 7 je znázorněna matice e_{ij} zobrazující celkovou vzdálenost v kilometrech při přejezdu svozného vozidla z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ v rámci fáze svozu řidičů.

Tabulka 7: Celková vzdálenost v kilometrech při přejezdu vozidla mezi vrcholy v rámci fáze svozu řidičů [autor], [26]

	V0	V6	V7	V8	V9	V10
V0	0	10,5	13	22,4	8,5	6,4
V6	10,5	0	19,2	31,9	17,6	16
V7	13	19,2	0	15,9	6,5	6,8
V8	22,4	31,9	15,9	0	12,4	13,9
V9	8,5	17,6	6,5	12,4	0	4,3
V10	6,4	16	6,8	13,9	4,3	0

Kompletní text programu pro řešení třetí varianty relokace vozidel má tvar:

```
model treti_varianta
uses "mmxprs"
declarations
N0=0..5
N1=1..5
N2=1..5
V=1..2
c:array(N0,N0)of real
d:array(N1,N2)of real
e:array(N0,N0)of real
x:array(N0,N0,V)of mpvar
z:array(N1,N2)of mpvar
u:array(N0,N0,V)of mpvar
y:array(N1,V)of mpvar
```

```
v:array(N2,V)of mpvar
end-declarations
n:=5
M:=9999
K:=4
c::[M,9.4,17.8,23.6,20.3,12.1,
9.4,M,17.3,24.8,25.3,17.5,
17.8,17.3,M,15,18.2,22,
23.6,24.8,15,M,7.4,20.3,
20.3,25.3,18.2,7.4,M,13.6,
12.5,17.5,22,20.3,13.6,M]
d::[7,12.5,23.9,10.9,9.3,
23.3,9.7,10.3,10.5,11.2,
38,17.4,7.7,12.9,16.3,
33.3,20.6,14.4,15.3,16.8,
24.6,19.5,23.9,16.3,11.3]
e::[M,10.5,13,22.4,8.5,6.4,
10.5,M,19.2,31.9,17.6,16,
13,19.2,M,15.9,6.5,6.8,
22.4,31.9,15.9,M,12.4,13.9,
8.5,17.6,6.5,12.4,M,4.3,
6.4,16,6.8,13.9,4.3,M]
forall(i in N0,j in N0,k in V)x(i,j,k)is_binary
forall(j in N1)sum(i in N0,k in V)x(i,j,k)=1
forall(j in N1,k in V)sum(i in N0)x(i,j,k)=sum(i in N0)x(j,i,k)
forall(k in V)sum(j in N1)x(0,j,k)<=1
forall(k in V)sum(i in N1)x(i,0,k)<=1
forall(k in V)sum(i in N0,j in N1)x(i,j,k)<=K
forall(i in N1,j in N1,k in V)y(i,k)-y(j,k)+n*x(i,j,k)<=n-1
forall(i in N1,j in N2)z(i,j)is_binary
forall(i in N1)sum(j in N2)z(i,j)=1
forall(j in N2)sum(i in N1)z(i,j)=1
forall(i in N0,j in N0,k in V)u(i,j,k)is_binary
forall(j in N2)sum(i in N0,k in V)u(i,j,k)=1
forall(j in N2,k in V)sum(i in N0)u(i,j,k)=sum(i in N0)u(j,i,k)
forall(k in V)sum(j in N2)u(0,j,k)<=1
forall(k in V)sum(i in N2)u(i,0,k)<=1
forall(k in V)sum(i in N0,j in N2)u(i,j,k)<=K
forall(i in N1,j in N1,k in V)v(i,k)-v(j,k)+n*u(i,j,k)<=n-1
uf:=sum(i in N0,j in N0,k in V)c(i,j)*x(i,j,k)+sum(i in N1,j in
```

*N2)d(i,j)*z(i,j)+sum(i in N0,j in N0,k in V)e(i,j)*u(i,j,k)*
minimize(uf)
writeln("uf= ",getobjval)
forall(i in N0,j in N0,k in V|getsol(x(i,j,k))=1)writeln("x(",i,",",j,",",k,")=", getsol(x(i,j,k)))
writeln
forall(i in N1,j in N2|getsol(z(i,j))=1)writeln("z(",i,",",j,")=",getsol(z(i,j)))
writeln
forall(i in N0,j in N0,k in V|getsol(u(i,j,k))=1)writeln("u(",i,",",j,",",k,")=", getsol(u(i,j,k)))
end-model

Naprogramovaný výstup vypadá následovně:

uf= 206.7

x(0,1,1)=1	*z(1,1)=1*	*u(0,1,2)=1*
x(0,5,2)=1	*z(2,2)=1*	*u(0,4,1)=1*
x(1,0,1)=1	*z(3,3)=1*	*u(1,0,2)=1*
x(2,0,2)=1	*z(4,4)=1*	*u(2,5,1)=1*
x(3,2,2)=1	*z(5,5)=1*	*u(3,2,1)=1*
x(4,3,2)=1		*u(4,3,1)=1*
x(5,4,2)=1		*u(5,0,1)=1*

Z výstupních hodnot je zřejmé, že hodnota účelové funkce je 206,7. Z toho vyplývá, že hodnota minimální celkové ujeté vzdálenosti při rozvozu řidičů z centrály provozovatele do míst odstavení vozidel, při následných přejezdech těchto vozidel do míst přistavení a při zpětném svozu řidičů činila 206,7 kilometrů.

Dále lze z následujících sedmi hodnot u_{ijk}, které vyjadřují přejezd vozidla $k \in V$ z vrcholu $i \in N_0$ do vrcholu $j \in N_0$ určit, v jakém pořadí navštěvovala vozidla vrcholy reprezentující místa přistavení, ve kterých nabírala rozvážející řidiče. Např. hodnota proměnné $u(0,1,2) = 1$ reprezentuje přejezd prvního vozidla z centrály provozovatele $V0$ do vrcholu $V1$ a hodnota proměnné $u(1,0,2) = 1$ reprezentuje následující přejezd stejného vozidla z vrcholu $V1$ zpět do centrály provozovatele $V0$. Z toho plyne, že druhé vozidlo pouze vyzvedlo jednoho rozvážejícího řidiče ve vrcholu $V1$ a vrátilo se zpět do centrály provozovatele $V0$. Takto lze analogicky určit i pořadí svozu řidičů prvním vozidlem z míst odstavení vozidel anebo pořadí rozvozu řidičů z centrály provozovatele $V0$ do míst odstavení. Z výstupních hodnot programu je patrné, že:

- první rozvozní vozidlo bude mít naplánovánu následující jízdu:

$$V0 \rightarrow V1 \rightarrow V0$$

- druhé rozvozní vozidlo bude mít naplánovánu následující jízdu:

$$V0 \rightarrow V5 \rightarrow V4 \rightarrow V3 \rightarrow V2 \rightarrow V0$$

- první svozné vozidlo bude mít naplánovánu následující jízdu:

$$V0 \rightarrow V9 \rightarrow V8 \rightarrow V7 \rightarrow V10 \rightarrow V0$$

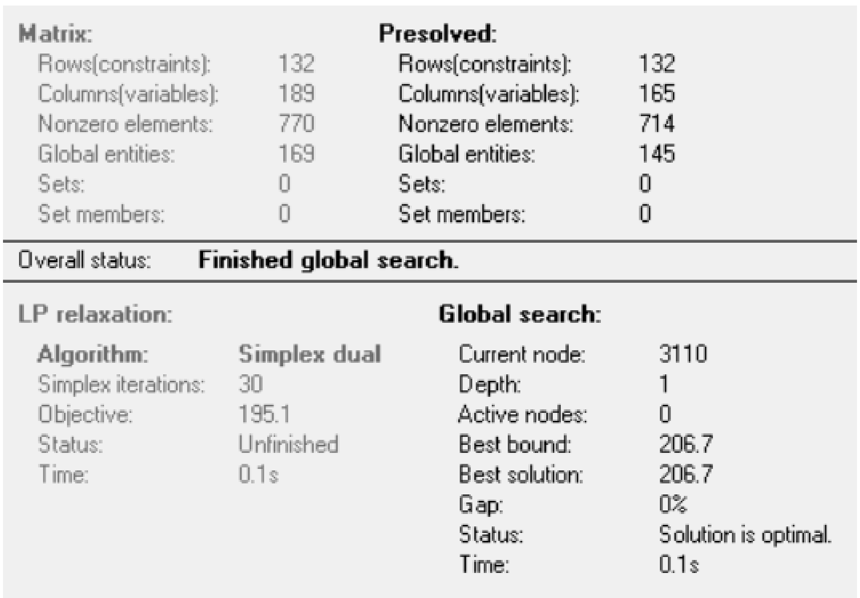
- druhé svozné vozidlo bude mít naplánovánu následující jízdu:

$$V0 \rightarrow V6 \rightarrow V0$$

- neproduktivní přejezdy vozidel z míst odstavení do cílových míst zůstaly stejné jako v první variantě řešení relokace vozidel.

Jak je zřejmé z předchozího textu, tak první rozvozní vozidlo přepraví jen jednoho řidiče do vrcholu $V1$ a vrátí se zpět do centrály provozovatele. Druhé rozvozní vozidlo přepraví zbývající čtyři řidiče z centrály provozovatele postupně do vrcholů $V5, V4, V3, V2$ a vrátí se zpět do centrály. Po přejezdech carsharingových vozidel z míst odstavení v neatraktivních lokalitách do míst přistavení vyzvedne první svozné vozidlo postupně čtyři řidiče z vrcholů $V9, V8, V7, V10$ a vrátí se zpět s řidiči do centrály provozovatele. Druhé svozné vozidlo vyzvedne řidiče ve vrcholu $V6$ a také se s ním vrátí do centrály provozovatele.

Na obrázku 12 je zobrazeno stavové hlášení o průběhu optimalizačního výpočtu třetí varianty řešení relokace vozidel v softwaru Xpress-IVE.



Obrázek 12: Hlášení o průběhu optimalizačního výpočtu třetí varianty v softwaru Xpress-IVE

4.5. Výpočetní experiment s dekomponovaným modelem třetí varianty řešení relokace vozidel

V tomto výpočetním experimentu bude porovnáno řešení dosažené třetí variantou řešení relokace vozidel (viz. předchozí podkapitola) s řešením, kdy tato varianta bude dekomponována na samostatné tři fáze. Bude porovnán výpočetní čas a kvalita získaných řešení (hodnota účelové funkce). Shrnutí je zobrazeno v tabulce 8.

Od rozsahu experimentu, ve kterém je devět míst odstavení a devět míst přistavení jsou pro rozvoz a svoz zvolena dvě vozidla s kapacitou $K = 8$. K tomuto kroku bylo přistoupeno z důvodu, že při menším počtu vozidel s vyšší kapacitou K je celková ujetá vzdálenost při rozvozech a svozech řidičů nižší než při větším počtu vozidel s nižší kapacitou K.

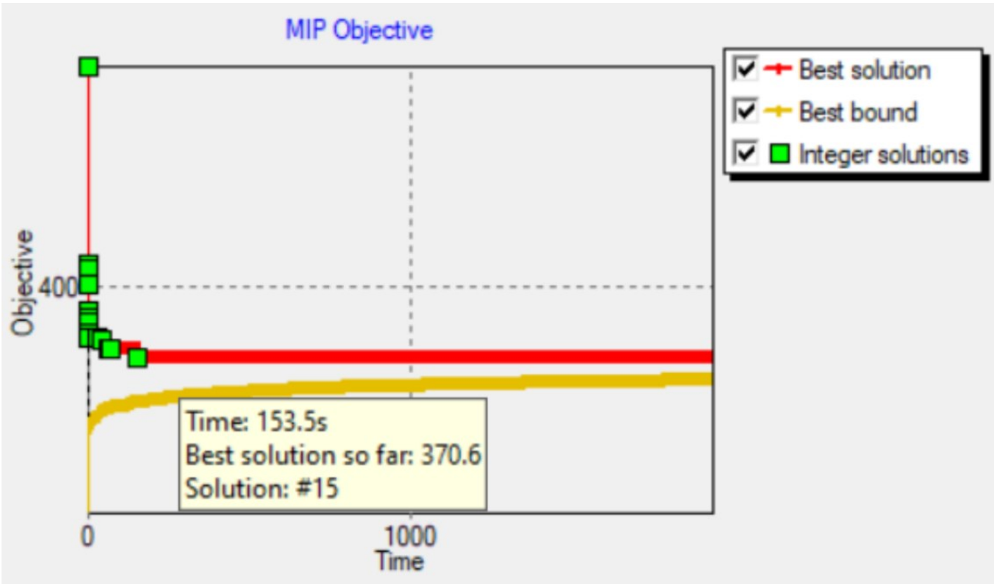
Tabulka 8: Porovnání výsledků heuristického přístupu založeného na matematickém programování a exaktního přístupu pro třetí variantu modelu

Rozsah experimentu (místa odstavení x místa přistavení)	Heuristický přístup založený na matematickém programování						Exaktní přístup		Odchylka výsledků exaktního přístupu	
	První fáze		Druhá fáze		Třetí fáze					
	Hodnota účelové funkce [km]	Doba výpočtu [s]	Hodnota účelové funkce [km]	Doba výpočtu [s]	Hodnota účelové funkce [km]	Doba výpočtu [s]	Hodnota účelové funkce [km]	Doba výpočtu [s]	Hodnota účelové funkce [km]	Doba výpočtu [s]
5x5	84,7	0,1	51	0,0	71	0,1	206,7	0,1	0	- 0,1
6x6	99,5	0,1	48,9	0,0	94,9	0,1	243,3	0,3	0	+ 0,1
7x7	111,5	0,2	59,9	0,0	91,6	0,2	263	25,4	0	+ 25
8x8	128,3	0,3	79,5	0,0	104,3	0,3	312,1	10,2	0	+ 9,6
9x9	135,8	0,6	84,7	0,0	111	1,2	331,5	85,8	0	+ 84
10x10	147,4	1,3	91,3	0,0	131,9	4,8	370,6	1 800	0	+ 1793,9

U přístupů založených na výše uvedených lineárních matematických modelech se očekává, že čas výpočtu poroste exponenciálně s rostoucí velikostí úlohy. Je to trend, který se může ovšem někdy odchýlit. Jak je zřejmé z tabulky 8, tak očekávaný trend byl potvrzen s drobnými výjimkami.

V případě vyšších počtů míst odstavení a míst přistavení (konkrétně od desíti míst odstavení a desíti míst přistavení) není software Xpress-IVE schopen vypočítat v akceptovatelném čase optimální hodnotu minimální celkové ujeté vzdálenosti při třetí variantě řešení relokace vozidel. Akceptovatelná doba výpočtu je v případě relokace vozidel stanovena na 30 minut. Poté se proces výpočtu ukončí a poslední nejlepší řešení je bráno jako akceptovatelné, avšak ne optimální.

Na následujícím obrázku je zachycen graf zobrazující průběh optimalizačního výpočtu třetí varianty relokace vozidel s desíti místy odstavení a desíti místy přistavení v softwaru Xpress-IVE.



Obrázek 13: Zobrazení průběhu optimalizačního výpočtu třetí varianty relokace vozidel s desíti místy odstavení a desíti místy přistavení v softwaru Xpress-IVE

Z obrázku je zřejmé, že nejlepší řešení celkové ujeté vzdálenosti v rámci třetí varianty relokace vozidel s desíti místy odstavení a desíti místy přistavení je 370,6 kilometrů. Toto nejlepší řešení bylo nalezeno po 153,5 sekundách, avšak software jej nepovažoval ještě za optimální a pokračoval ve výpočtech. V tomto případě je ale vidět, že i přes nedokončený výpočet je nejlepší nalezené řešení optimální (shoduje se se součtem účelových funkcí všech tří fází).

5. Zhodnocení dosažených výsledků

Úkolem této práce bylo navrhnout takové matematické modely, které by se daly použít při relokaci carsharingových vozidel z odstavných neatraktivních lokalit do cílových míst v atraktivních lokalitách v rámci volného carsharingu a zároveň by bylo zaručeno nalezení optimálního řešení. Byly vytvořeny matematické modely, které dokáží minimalizovat buď celkovou ujetou vzdálenost v rámci relokace vozidel, anebo celkový čas, při kterém probíhá relokace vozidel.

Aby byla ověřena správnost a funkčnost vytvořených matematických modelů, byly realizovány experimenty na dopravní síti, ve které byla umístěna centrála provozovatele, místa odstavení vozidel v neatraktivních lokalitách a místa přistavení v uživatelsky atraktivních lokalitách.

5.1. Výhody navržených modelů

Mezi hlavní výhody navržených matematických modelů patří schopnost nalezení optimálních řešení procesu relokace vozidel v relativně krátkém čase.

Dalším pozitivem je fakt, že při matematických modelech pracujících s celkovou minimální ujetou vzdáleností je možnost relativně přesného zjištění spotřebovaného paliva v rámci relokace a s tím spojených výdajů.

Z výstupů matematických modelů pracujících s celkovou minimální ujetou vzdáleností a při zvolení průměrné rychlosti při relokaci vozidel je možno vypočítat přibližný celkový čas, za který je relokace vozidel vykonána.

5.2. Nevýhody navržených modelů

Před každým výpočtem je nutné ručně vyhledat a zadat vstupní údaje (celkovou vzdálenost anebo čas přejezdu mezi konkrétními vrcholy dopravní sítě). Zadávání vstupních dat do programu je zdlouhavé a nepřehledné.

Při takto navržených matematických modelech není možno získat přesný čas, po který by relokace vozidel probíhala. Pokud se v matematických modelech počítá s celkovým časem, tak jeho výsledná hodnota v tomto případě zobrazuje celkový čas, při kterém byly vozidla v pohybu.

Mezi hlavní nevýhody, zejména při větších relokacích vozidel, také patří nutnost mít dostatečně výkonnou výpočetní techniku pro kapacitně a časově náročný výpočet.

5.3. Doporučení pro provozovatele volného carsharingu

Jelikož nejvíce času spotřebuje vyhledávání vstupních hodnot (zjištění vzdáleností anebo dob přejezdů mezi konkrétními vrcholy dopravní sítě), tak je doporučeno, aby byl výpočetní program s matematickými modely propojen s vhodnými mapovými podklady v digitální formě, ve kterých dispečer zadá místa odstavení a přistavení vozidel. Následně by se automaticky vytvořila matice vstupních hodnot reprezentujících potřebné vzdálenosti anebo doby přejezdů mezi zvolenými vrcholy. Tyto hodnoty by se automaticky transformovaly do výpočetního programu Xpress-IVE a zahájil by se optimalizační výpočet vedoucí k nalezení optimálního řešení.

Při menším počtu požadovaných vozidel v místech přistavení nemusí být z finančního hlediska vhodné řešit relokaci vozidel navrženými modely, jelikož je pro takto nadefinovanou relokaci vozidel zapotřebí nejméně jednoho rozvážejícího (svážejícího) řidiče a na neproduktivní přejezdy tolik řidičů, kolik je požadováno vozidel v místech přistavení. Např. při relokaci vozidel řešenou druhou anebo třetí variantou se čtyřmi požadovanými vozidly v místech přistavení je zapotřebí nejméně pěti řidičů. Avšak pokud by se relokace vozidel s menším počtem požadovaných vozidel v místech přistavení řešila ve dvou lidech – jeden rozvážející (svážející) řidič a druhý řidič na neproduktivní přejezdy vozidel, tak by výsledná hodnota celkové najeté vzdálenosti byla sice vyšší, ale provozovatel by ušetřil mzdové náklady řidičů.

Při výskytu třetí varianty relokace vozidel je od rozsahu úlohy přibližně nad deset míst odstavení a deset míst přistavení vhodné pracovat s heuristickým přístupem založeným na matematickém programování, protože jen tak je v relativně krátké době možno nalézt optimální řešení. Od této velikosti přesahuje výpočetní čas 30 minut, což je nežádoucí. Heuristický přístup potřebuje při stejném počtu míst a přibližně stejné pracnosti výrazně kratší dobu.

K rozvozu a svozu řidičů je vhodné volit taková vozidla, která mají vyšší kapacitu K. Tím se zaručí nižší celková ujetá vzdálenost při rozvozech a svozech řidičů, popřípadě nižší čas rozvozu a svozu řidičů, než při více vozidlech s nižší kapacitou K.

6. Závěr

Předmětem této diplomové práce je nalezení optimálního řešení relokace carsharingových vozidel z odstavných neatraktivních lokalit do cílových míst v atraktivních lokalitách za pomocí vhodných matematických modelů.

V úvodní části práce se může čtenář dozvědět o obecné problematice carsharingu a jeho různých typech. Dále jsou uvedeny stručné informace o historii i současnosti carsharingu v nejen v České republice, ale i v ostatních zemích světa, popřípadě o možných výhodách a nevýhodách pro uživatele této služby a v neposlední řadě také o popisu přepravního procesu, počínajícího prvotní registrací a končícího odevzdáním vozidla.

Ve druhé kapitole je věnován prostor popisu čtyř optimalizačních úloh, které lze využít při matematickém modelování systému carsharing, konkrétně k modelování systému volného carsharingu. Každá optimalizační úloha je matematicky zformulována a je uveden její matematický model.

Následující kapitola prezentuje způsob, jakým jsou jednotlivé typy optimalizačních úloh využity. Kapitola také možné varianty procesu relokace vozidel, přičemž jednotlivé varianty se od sebe liší počtem řešených fází a počty odstavených a přistavených vozidel. Pro každou variantu procesu relokace vozidel je uveden matematický model.

Aby byla ověřena funkčnost a správnost těchto navržených matematických modelů pro relokaci vozidel ve volném carsharingu, je do práce vložena kapitola s výpočetními experimenty, které byly prováděny v optimalizačním software Xpress-IVE. Experimenty byly prováděny na modelových úlohách, přičemž vstupní data pro modelové úlohy byla čerpána z mapových podkladů hlavního města Prahy, ve které se nachází centrála provozovatele, pět míst odstavení vozidel a pět míst požadovaného přistavení vozidel.

V poslední části práce je provedeno zhodnocení výsledků dosažených ve výpočetních experimentech.

Poděkování

Rád bych tímto způsobem poděkoval panu doc. Ing. Dušanu Teichmannovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady, vstřícnost, a především trpělivost při konzultacích a při zpracování tématu této diplomové práce.

7. Seznam použité literatury

[1] *Autonapůl: První český carsharing* [online]. 2018 [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://www.autonapul.cz/

[2] HELLER, Jakub. *Sdílení aut může změnit tvář města, ale není pro každého* [online]. 9. září 2018 [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://www.idnes.cz/zpravy/domaci/test-carsharing-ajo-car4way-sdilena-auta-sdileni-aut-revolt-autonapul.A180906_161639_domaci_hell

[3] *Lessons Learned from the History of Car Sharing: A Quick History Lesson on Car Sharing* [online]. [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://tiffanydstone.com/2013/08/23/lessons-learned-from-the-history-of-car-sharing/

[4] *Autonaminuty.org: Pierwszy polski portal o współdzielonej mobilności* [online]. 2016 [cit. 2019-12-29]. Dostupné z: https://autonaminuty.org/a-jak-to-wszystko-sie-zaczelo/

[5] DAILY NEWS TECH. [Daily News Tech]. (2018, 21. listopad). The world's first electric car-sharing scheme [videosoubor]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=y1O0H8Zpep8

[6] NIKONCLUB. *Witkar statio* [online]. In: . 10 Mei 2018 [cit. 2019-12-29]. Dostupné z: http://chriswestraconsulting.nl/2018/05/stakeholderdialoog-duurzame-energie-oude-wijn-nieuwe-vaten/witkar-statio-foto-nikonclub/

[7] GOTO MALTA. [GoTo Malta]. (2019, 10. červen). GoTo One-Way and Roundtrip service [videosoubor]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=xWz7j-ja5Ao

[8] DI FEBBRARO, Angela, Nicola SACCO a Mahnam SAEEDNIA. One-Way Carsharing: Solving the Relocation Problem. In: *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board* [online]. 2012, **2319**(1), s. 113-120 [cit. 2019-12-30]. DOI: 10.3141/2319-13. ISSN 0361-1981. Dostupné z: http://journals.sagepub.com/doi/10.3141/2319-13

[9] ČMIELOVÁ, Martina. *Studenta: SPOLUJÍZDA – Cestování pohodlně a téměř zadarmo!* [online]. 17. 10. 2011 [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://www.studenta.cz/spolujizda-cestovani-pohodlne-a-temer-zadarmo/r~st:article:735/

[10] Carsharing: Fractional ownership. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 20 December 2019 [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Carsharing#Fractional_ownership

[11] *HoppyGo: Půjčte si auto přímo od majitele* [online]. [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://www.hoppygo.com/cs

[12] Carsharing Market & Growth Analysis 2019. *Movmi: Your Shared Mobility Expert* [online]. 10 Jul 2019 [cit. 2020-02-22]. Dostupné z: http://movmi.net/carsharing-market-growth-2019/

[13] Carsharing HoppyGo v ČR roste. *FDrive: Elektromobily, autonomní řízení a doprava ...* [online]. 29. 01. 2020 [cit. 2020-02-21]. Dostupné z: https://fdrive.cz/clanky/carsharing-hoppygo-v-cr-roste-k-dispozici-ma-1-800-vozu-ve-240-mestech-4896

[14] *CAR4WAY: Objevte krásy carsharingu!* [online]. [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://www.car4way.cz/carsharing

[15] *Enviwiki: Car-sharing* [online]. 14. 12. 2017 [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://www.enviwiki.cz/wiki/Car-sharing

[16] SPIERS, Adam. *Thinking About Downsizing to a Car Share? Consider the Pros & Cons First* [online]. January 21, 2014 [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: http://www.communityladders.com/thinking-about-downsizing-to-a-car-share-consider-the-pros-cons-first/

[17] KUČEŘÍK, Jan. [Jan Kučeřík]. (2019, 18. leden). Carsharing - jednoduchý pronájem auta [videosoubor]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=gZAMCllcFEM

[18] *AJO Carsharing: Alternativa k vlastnění auta* [online]. 2014 [cit. 2019-12-28]. Dostupné z: https://www.ajo.cz/

[19] PROFITA, Cassandra. *The Pros And Cons Of Car-Sharing* [online]. 24 April 2013 [cit. 2019-12-28]. Dostupné z: https://www.opb.org/news/blog/ecotrope/the-pros-and-cons-of-car-sharing/

[20] *Proč si kupovat auto, když ho mají jiní?* [online]. In: . [cit. 2019-12-30]. Dostupné z: https://www.ecofuture.cz/clanky/carsharing-proc-si-kupovat-auto-kdyz-ho-maji-jini

[21] TEICHMANN, Dušan. *Optimalizace technologických procesů* [online]. Druhé doplněné vydání. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2017, 103 s. [cit. 2020-05-12]. ISBN 978-80-248-3269-2. Dostupné z: https://issuu.com/michdor/docs/m14_text

[22] Vehicle Routing Problem. In: *NEO: Networking and Emerging Optimalization* [online]. [cit. 2020-05-12]. Dostupné z: http://neo.lcc.uma.es/vrp/vehicle-routing-problem/

[23] DANTZIG, G. B a J. H. RAMSER. *Management Science: The Truck Dispatching Problem* [online]. INFORMS, Vol. 6, No. 1 (Oct., 1959), pp. 80-91 [cit. 2020-05-12]. Dostupné z: https://andresjaquep.files.wordpress.com/2008/10/2627477-clasico-dantzig.pdf

[24] LIONG, C.-Y., I. WAN a Omar KHAIRUDDIN. *Vehicle routing problem: Models and solutions* [online]. Malaysia, 2008 [cit. 2020-04-20]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/313005083_Vehicle_routing_problem_Models_and_solutions

[25] JANÁČEK, Jaroslav. *Optimalizace na dopravních sítích*. 2. proprac. vyd. Žilina: Žilinská univerzita, 2006, 248 s. Vysokoškolská učebnice. ISBN 80-8070-586-0

[26] *Google Maps* [online]. [cit. 2020-05-12]. Dostupné z: https://www.google.cz/maps

8. Seznam obrázků

9. Seznam tabulek

Přílohová část diplomové práce

10. Seznam příloh

11. Přílohy

Příloha A: Matematický model pro druhou variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancovaného přiřaďovacího problému s přebytkem kapacit zdrojů v druhé fázi

Matematický model pro druhou variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancovaného přiřaďovacího problému s přebytkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\, f(x,y,z) = \sum_{i\in N_o}\sum_{j\in N_o}\sum_{k\in V} c_{ij}x_{ijk} + \sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_2} d_{ij}z_{ij} \tag{11.1}$$

za podmínek:

$$\sum_{i\in N_o}\sum_{k\in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \tag{11.2}$$

$$\sum_{i\in N_o} x_{ijk} = \sum_{i\in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \tag{11.3}$$

$$\sum_{j\in N_1} x_{0jk} \le 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.4}$$

$$\sum_{i\in N_1} x_{i0k} \le 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.5}$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \le n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.6}$$

$$\sum_{i\in N_o}\sum_{j\in N_1} x_{ijk} \le K \qquad pro\ k \in V \tag{11.7}$$

$$\sum_{j\in N_2} z_{ij} \le 1 \qquad pro\ i \in N_1 \tag{11.8}$$

$$\sum_{i\in N_1} z_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.9}$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \tag{11.10}$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.11}$$

$$z_{ij} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \tag{11.12}$$

Funkce (11.1) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci druhé varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení).

Skupiny omezujících podmínek (11.2) – (11.7) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.2) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.3) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.4) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.5) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.6) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.7) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.8) a (11.9) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.8) zabezpečuje, že z každého místa odstavení bude nařízen přejezd maximálně jednomu vozidlu. Skupina omezujících podmínek (11.9) zajistí, že do každého místa, ve kterém je vozidlo požadováno, bude přistaveno právě jedno vozidlo. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.10), (11.11) a (11.12) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro druhou variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancovaného přiřaďovacího problému s nedostatkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\, f(x,y,z) = \sum_{i\in N_o} \sum_{j\in N_o} \sum_{k\in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i\in N_1} \sum_{j\in N_2} d_{ij} z_{ij} \tag{11.13}$$

za podmínek:

$$\sum_{i\in N_o} \sum_{k\in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \tag{11.14}$$

$$\sum_{i\in N_o} x_{ijk} = \sum_{i\in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \tag{11.15}$$

$$\sum_{j\in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.16}$$

$$\sum_{i\in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.17}$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.18}$$

$$\sum_{i\in N_o} \sum_{j\in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{11.19}$$

$$\sum_{j\in N_2} z_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in N_1 \tag{11.20}$$

$$\sum_{i\in N_1} z_{ij} \leq 1 \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.21}$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \tag{11.22}$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.23}$$

$$z_{ij} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \tag{11.24}$$

Funkce (11.13) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci druhé varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení).

Skupiny omezujících podmínek (11.14) – (11.19) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.14) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.15) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.16) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.17) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina

omezujících podmínek (11.18) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.19) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.20) a (11.21) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.20) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (11.21) zajistí, že na každé místo bude přistaveno maximálně jedno vozidlo. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.22), (11.23) a (11.24) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro druhou variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem vybilancované dopravní úlohy v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\, f(x,y,z) = \sum_{i \in N_O} \sum_{j \in N_O} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \tag{11.25}$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_O} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \tag{11.26}$$

$$\sum_{i \in N_O} x_{ijk} = \sum_{i \in N_O} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \tag{11.27}$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.28}$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.29}$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.30}$$

$$\sum_{i \in N_O} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{11.31}$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = m_i \qquad pro\ i \in N_1 \tag{11.32}$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = n_j \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.33}$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_O, j \in N_O, k \in V \tag{11.34}$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.35}$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \tag{11.36}$$

Funkce (11.25) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci druhé varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení).

Skupiny omezujících podmínek (11.26) – (11.31) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.26) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.27) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.28) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.29) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.30) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.31) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.32) a (11.33) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.32) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (11.33) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěn požadovaný počet vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.34), (11.35) a (11.36) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro druhou variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancované dopravní úlohy s přebytkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\, f(x,y,z) = \sum_{i \in N_O} \sum_{j \in N_O} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \tag{11.37}$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_O} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \tag{11.38}$$

$$\sum_{i \in N_O} x_{ijk} = \sum_{i \in N_O} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \tag{11.39}$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.40}$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.41}$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.42}$$

$$\sum_{i \in N_O} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{11.43}$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} \leq m_i \qquad pro\ i \in N_1 \tag{11.44}$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = n_j \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.45}$$

$$x_{ijk} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_O, j \in N_O, k \in V \tag{11.46}$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.47}$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \tag{11.48}$$

Funkce (11.37) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci druhé varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení).

Skupiny omezujících podmínek (11.38) – (11.43) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.38) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.39) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.40) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.41) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina

omezujících podmínek (11.42) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.43) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.44) a (11.45) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.44) zabezpečuje, že z každého místa odstavení nebude nařízen přejezd více vozidlům, než jsou v daném místě k dispozici. Skupina omezujících podmínek (11.45) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěn požadovaný počet vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.46), (11.47) a (11.48) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro druhou variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancované dopravní úlohy s nedostatkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\, f(x,y,z) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} \qquad (11.49)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \qquad (11.50)$$

$$\sum_{i \in N_o} x_{ijk} = \sum_{i \in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \qquad (11.51)$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.52)$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.53)$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i, j \in N_1, k \in V \qquad (11.54)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \qquad (11.55)$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = m_i \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (11.56)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} \leq n_j \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (11.57)$$

$$x_{ijk} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (11.58)$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (11.59)$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (11.60)$$

Funkce (11.49) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci druhé varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení).

Skupiny omezujících podmínek (11.50) – (11.55) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.50) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.51) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.52) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.53) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina

omezujících podmínek (11.54) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.55) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.56) a (11.57) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.56) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (11.57) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěno maximálně tolik vozidel, kolik je požadováno. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.58), (11.59) a (11.60) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro třetí variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancovaného přiřaďovacího problému s přebytkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\ f(x,y,z) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} e_{ij} u_{ijk} \tag{11.61}$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \tag{11.62}$$

$$\sum_{i \in N_o} x_{ijk} = \sum_{i \in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \tag{11.63}$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.64}$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.65}$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.66}$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{11.67}$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} \leq 1 \qquad pro\ i \in N_1 \tag{11.68}$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.69}$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} u_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.70}$$

$$\sum_{i \in N_o} u_{ijk} = \sum_{i \in N_o} u_{jik} \qquad pro\ j \in N_2, k \in V \tag{11.71}$$

$$\sum_{j \in N_2} u_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.72}$$

$$\sum_{i \in N_2} u_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.73}$$

$$v_{ik} - v_{jk} + n \cdot u_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.74}$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_2} u_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{11.75}$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \tag{11.76}$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.77}$$

$$z_{ij} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \tag{11.78}$$

$$u_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \tag{11.79}$$

$$v_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.80}$$

Funkce (11.61) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci třetí varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení a o neproduktivní kilometry najeté v rámci svozu).

Skupiny omezujících podmínek (11.62) – (11.67) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.62) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.63) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.64) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.65) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.66) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.67) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.68) a (11.69) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.68) zabezpečuje, že z každého místa odstavení bude nařízen přejezd maximálně jednomu vozidlu. Skupina omezujících podmínek (11.69) zajistí, že do každého místa, ve kterém je vozidlo požadováno, bude přistaveno právě jedno vozidlo. Skupiny omezujících podmínek (11.70) – (11.75) se vztahují k třetí fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.70) zajistí, že z každého místa přistavení vozidla bude odvezen právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.71) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.72) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze svozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.73) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.74) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (11.75) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.76) až (11.80) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro třetí variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancovaného přiřaďovacího problému s nedostatkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\ f(x,y,z) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} e_{ij} u_{ijk} \qquad (11.81)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \qquad (11.82)$$

$$\sum_{i \in N_o} x_{ijk} = \sum_{i \in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \qquad (11.83)$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.84)$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.85)$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \le n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \qquad (11.86)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \le K \qquad pro\ k \in V \qquad (11.87)$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = 1 \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (11.88)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} \le 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (11.89)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} u_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (11.90)$$

$$\sum_{i \in N_o} u_{ijk} = \sum_{i \in N_o} u_{jik} \qquad pro\ j \in N_2, k \in V \qquad (11.91)$$

$$\sum_{j \in N_2} u_{0jk} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.92)$$

$$\sum_{i \in N_2} u_{i0k} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.93)$$

$$v_{ik} - v_{jk} + n \cdot u_{ijk} \le n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \qquad (11.94)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_2} u_{ijk} \le K \qquad pro\ k \in V \qquad (11.95)$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (11.96)$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (11.97)$$

$$z_{ij} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (11.98)$$

$$u_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (11.99)$$

$$v_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (11.100)$$

Funkce (11.81) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci třetí varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení a o neproduktivní kilometry najeté v rámci svozu).

Skupiny omezujících podmínek (11.82) – (11.87) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.82) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.83) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.84) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.85) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.86) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.87) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.88) a (11.89) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.88) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (11.89) zajistí, že na každé místo bude přistaveno maximálně jedno vozidlo. Skupiny omezujících podmínek (11.90) – (11.95) se vztahují k třetí fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.90) zajistí, že z každého místa přistavení vozidla bude odvezen právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.91) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.92) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze svozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.93) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.94) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (11.95) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.96) až (11.100) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro třetí variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem vybilancované dopravní úlohy v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\ f(x,y,z) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} e_{ij} u_{ijk} \tag{11.101}$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \tag{11.102}$$

$$\sum_{i \in N_o} x_{ijk} = \sum_{i \in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \tag{11.103}$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.104}$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.105}$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.106}$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{11.107}$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = m_i \qquad pro\ i \in N_1 \tag{11.108}$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} = n_j \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.109}$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} u_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \tag{11.110}$$

$$\sum_{i \in N_o} u_{ijk} = \sum_{i \in N_o} u_{jik} \qquad pro\ j \in N_2, k \in V \tag{11.111}$$

$$\sum_{j \in N_2} u_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.112}$$

$$\sum_{i \in N_2} u_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \tag{11.113}$$

$$v_{ik} - v_{jk} + n \cdot u_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \tag{11.114}$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_2} u_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \tag{11.115}$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \tag{11.116}$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.117}$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \tag{11.118}$$

$$u_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \tag{11.119}$$

$$v_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \tag{11.120}$$

Funkce (11.101) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci třetí varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení a o neproduktivní kilometry najeté v rámci svozu).

Skupiny omezujících podmínek (11.102) – (11.107) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.102) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.103) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.104) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.105) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.106) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.107) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.108) a (11.109) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.108) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (11.109) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěn požadovaný počet vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.110) – (11.115) se vztahují k třetí fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.110) zajistí, že z každého místa přistavení vozidla bude odvezen právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.111) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.112) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze svozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.113) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.114) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (11.115) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.116) až (11.120) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro třetí variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancované dopravní úlohy s přebytkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\ f(x,y,z) = \sum_{i\in N_o}\sum_{j\in N_o}\sum_{k\in V} c_{ij}x_{ijk} + \sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_2} d_{ij}z_{ij} + \sum_{i\in N_o}\sum_{j\in N_o}\sum_{k\in V} e_{ij}u_{ijk} \qquad (11.121)$$

za podmínek:

$$\sum_{i\in N_o}\sum_{k\in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \qquad (11.122)$$

$$\sum_{i\in N_o} x_{ijk} = \sum_{i\in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \qquad (11.123)$$

$$\sum_{j\in N_1} x_{0jk} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.124)$$

$$\sum_{i\in N_1} x_{i0k} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.125)$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \le n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \qquad (11.126)$$

$$\sum_{i\in N_o}\sum_{j\in N_1} x_{ijk} \le K \qquad pro\ k \in V \qquad (11.127)$$

$$\sum_{j\in N_2} z_{ij} \le m_i \qquad pro\ i \in N_1 \qquad (11.128)$$

$$\sum_{i\in N_1} z_{ij} = n_j \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (11.129)$$

$$\sum_{i\in N_o}\sum_{k\in V} u_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \qquad (11.130)$$

$$\sum_{i\in N_o} u_{ijk} = \sum_{i\in N_o} u_{jik} \qquad pro\ j \in N_2, k \in V \qquad (11.131)$$

$$\sum_{j\in N_2} u_{0jk} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.132)$$

$$\sum_{i\in N_2} u_{i0k} \le 1 \qquad pro\ k \in V \qquad (11.133)$$

$$v_{ik} - v_{jk} + n \cdot u_{ijk} \le n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \qquad (11.134)$$

$$\sum_{i\in N_o}\sum_{j\in N_2} u_{ijk} \le K \qquad pro\ k \in V \qquad (11.135)$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (11.136)$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (11.137)$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \qquad (11.138)$$

$$u_{ijk} \in \{0;1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \qquad (11.139)$$

$$v_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \qquad (11.140)$$

Funkce (11.121) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci třetí varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení a o neproduktivní kilometry najeté v rámci svozu).

Skupiny omezujících podmínek (11.122) – (11.127) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.122) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.123) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.124) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.125) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.126) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.127) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.128) a (11.129) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.128) zabezpečuje, že z každého místa odstavení nebude nařízen přejezd více vozidlům, než jsou v daném místě k dispozici. Skupina omezujících podmínek (11.129) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěn požadovaný počet vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.130) – (11.135) se vztahují k třetí fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.130) zajistí, že z každého místa přistavení vozidla bude odvezen právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.131) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.132) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze svozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.133) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.134) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (11.135) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.136) až (11.140) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.

Matematický model pro třetí variantu problému relokace vozidel kombinující model VRP s modelem nevybilancované dopravní úlohy s nedostatkem kapacit zdrojů v druhé fázi bude mít tvar:

$$min\ f(x,y,z) = \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} d_{ij} z_{ij} + \sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_o} \sum_{k \in V} e_{ij} u_{ijk} \quad (11.141)$$

za podmínek:

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} x_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_1 \quad (11.142)$$

$$\sum_{i \in N_o} x_{ijk} = \sum_{i \in N_o} x_{jik} \qquad pro\ j \in N_1, k \in V \quad (11.143)$$

$$\sum_{j \in N_1} x_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \quad (11.144)$$

$$\sum_{i \in N_1} x_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \quad (11.145)$$

$$y_{ik} - y_{jk} + n \cdot x_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \quad (11.146)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_1} x_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \quad (11.147)$$

$$\sum_{j \in N_2} z_{ij} = m_i \qquad pro\ i \in N_1 \quad (11.148)$$

$$\sum_{i \in N_1} z_{ij} \leq n_j \qquad pro\ j \in N_2 \quad (11.149)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{k \in V} u_{ijk} = 1 \qquad pro\ j \in N_2 \quad (11.150)$$

$$\sum_{i \in N_o} u_{ijk} = \sum_{i \in N_o} u_{jik} \qquad pro\ j \in N_2, k \in V \quad (11.151)$$

$$\sum_{j \in N_2} u_{0jk} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \quad (11.152)$$

$$\sum_{i \in N_2} u_{i0k} \leq 1 \qquad pro\ k \in V \quad (11.153)$$

$$v_{ik} - v_{jk} + n \cdot u_{ijk} \leq n - 1 \qquad pro\ i,j \in N_1, k \in V \quad (11.154)$$

$$\sum_{i \in N_o} \sum_{j \in N_2} u_{ijk} \leq K \qquad pro\ k \in V \quad (11.155)$$

$$x_{ijk} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \quad (11.156)$$

$$y_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \quad (11.157)$$

$$z_{ij} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N_1, j \in N_2 \quad (11.158)$$

$$u_{ijk} \in \{0; 1\} \qquad pro\ i \in N_o, j \in N_o, k \in V \quad (11.159)$$

$$v_{ik} \in R_0^+ \qquad pro\ i \in N, k \in V \quad (11.160)$$

Funkce (11.141) reprezentuje optimalizační kritérium – v tomto případě se jedná o celkovou ujetou vzdálenost při relokaci vozidel v rámci třetí varianty procesu relokace (neproduktivní kilometry najeté v rámci rozvozu zvýšené o neproduktivní kilometry najeté v rámci přejezdů carsharingových vozidel z míst jejich odstavení do míst jejich přistavení a o neproduktivní kilometry najeté v rámci svozu).

Skupiny omezujících podmínek (11.142) – (11.147) se vztahují k první fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.142) zajistí, že do každého místa odstavení vozidla bude přepraven právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.143) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.144) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze rozvozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.145) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.146) jsou takzvané anticyklické podmínky. Ty se dodávají proto, aby bylo zabráněno vzniku nepřípustných řešení. Skupina omezujících podmínek (11.147) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny omezujících podmínek (11.148) a (11.149) se vztahují k druhé fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.148) zabezpečuje, že u každého odstaveného vozidla bude nařízen přejezd. Skupina omezujících podmínek (11.149) zabezpečuje, že na každé místo přistavení bude umístěno maximálně tolik vozidel, kolik je požadováno. Skupiny omezujících podmínek (11.150) – (11.155) se vztahují k třetí fázi relokace vozidel. Skupina omezujících podmínek (11.150) zajistí, že z každého místa přistavení vozidla bude odvezen právě jeden řidič. Skupina podmínek (11.151) zajistí kontinuitu jízdy vozidla, které daný vrchol obsluhuje (vozidlo, které do vrcholu přijelo, musí z vrcholu také odjet). Skupina omezujících podmínek (11.152) zajistí, že každé vozidlo v rámci fáze svozu řidičů vyjede z depa maximálně jednou a skupina omezujících podmínek (11.153) zajistí, že každé vozidlo se vrátí do depa maximálně jednou. Skupina omezujících podmínek (11.154) jsou takzvané anticyklické podmínky. Skupina omezujících podmínek (11.155) zajistí nepřekročení kapacit jednotlivých vozidel. Skupiny obligatorních omezujících podmínek (11.156) až (11.160) vymezují definiční obory proměnných použitých v modelu.